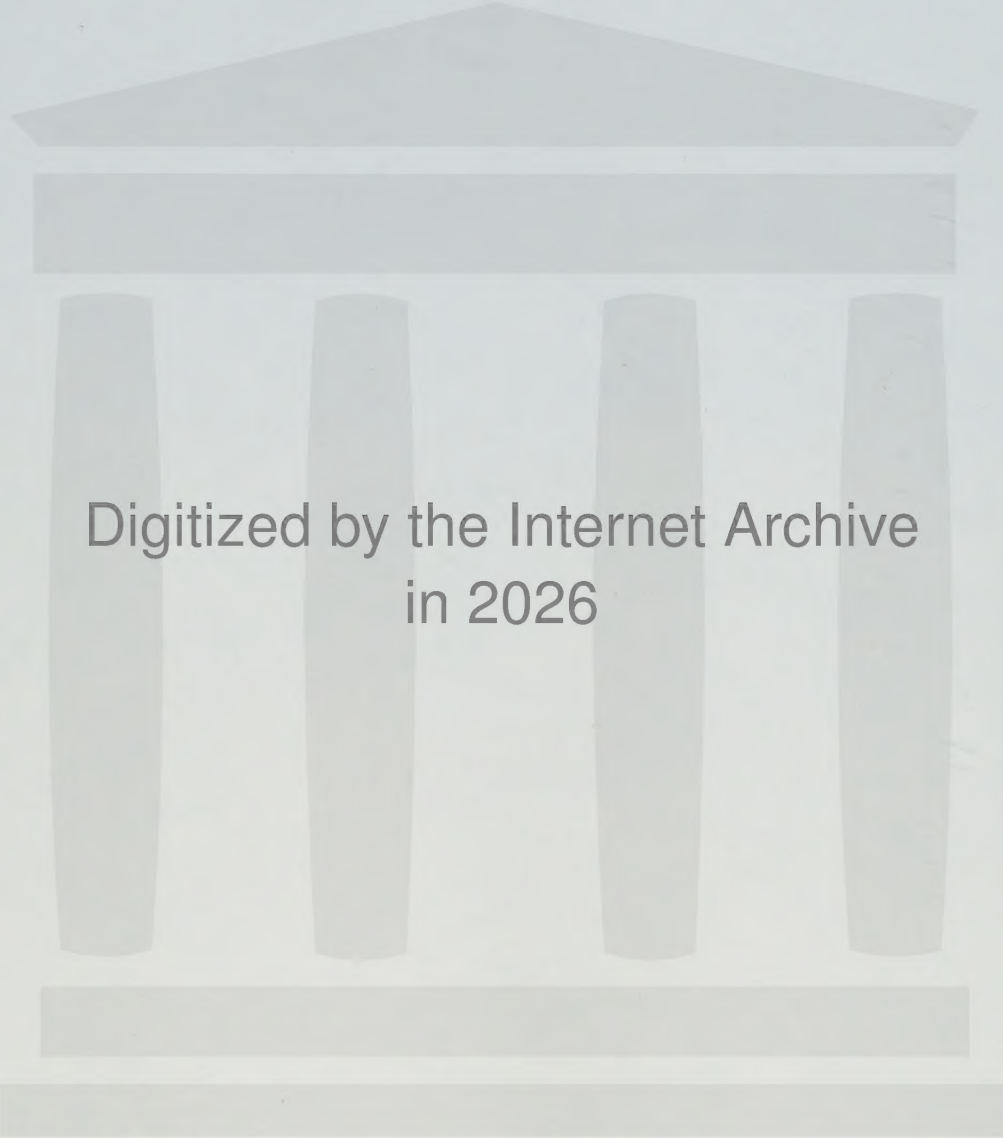


J. Hofman

Frankfurt 1979



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550809_0020

PHASENÜBERGÄNGE IN KERNMATERIE

HOHER DICHT

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissen-
schaften beim Fachbereich Physik der
Johann-Wolfgang-Goethe-Universität zu
Frankfurt am Main

von

Jürgen Hofmann

aus Friedberg

Frankfurt am Main

1979

UNIVERSITY OF LEIDEN

LIBRARY

UNIVERSITY OF LEIDEN

LIBRARY

UNIVERSITY OF LEIDEN
LIBRARY
UNIVERSITY OF LEIDEN
LIBRARY
UNIVERSITY OF LEIDEN
LIBRARY



UNIVERSITY OF LEIDEN

LIBRARY

UNIVERSITY OF LEIDEN

LIBRARY

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik
der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität zu
Frankfurt am Main

Dekan : Prof. Dr. Wolf

Leiter der Arbeit : Prof. Dr. W. Greiner

Erstgutachter : Prof. Dr. W. Greiner

Zweitgutachter : Prof. Dr. R. Dreizler

Drittgutachter: Dr. Miklos Gyulassy

Tag der mündlichen Prüfung : 17. August 1979

Abstract

A method for the description of spin-isospin phase transitions in nuclear matter is developed. It allows a complete description of the pion condensation phase transition in the framework of the Landau-Migdal Fermi liquid theory. The equation of the order parameter is derived and the condensation energy is calculated. We study the influence of pion condensation on the nuclear equation of state and the temperature dependence of pion condensation.

Finally the phase transition from nucleon to quark matter is investigated. The relevance of the color degree of freedom is discussed.

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
1. Einführung	1
2. <u>Phasenübergänge in unendlicher Materie</u>	5
2.1 Die Landau-Migdal-Theorie der Fermi-Flüssigkeiten	5
2.2 Die Störungstheorie im kondensierten Zustand	12
2.3 Die Dysongleichung	18
3. <u>Phasenübergänge in Kernmaterie</u>	21
3.1 Lösung der Dysongleichung: Die selbstkonsistente Gleichung des Ordnungsparameters	24
3.2 Die Kondensationsenergie und die Zustandsgleichung der Kernmaterie	33
3.3 Zur Größe der Kopplungskonstanten	37
3.4 Die Temperaturabhängigkeit der Kondensation	41
3.5 Diskussion der Resultate	47
4. <u>Phasenübergänge in Quarkmaterie</u>	65
4.1 Die Quark-Quark-Wechselwirkung	66
4.2 Der Grundzustand der Quarkmaterie im Rahmen eines SU(3)-Color-Modells	68
5. <u>Die Zustandsgleichung der hadronischen Materie</u>	78
6. Schlußfolgerungen und Ausblick	81
Anhänge A - C	83
Lebenslauf	94
Danksagung	96

1. Einleitung

In den letzten fünf Jahren ist es durch den Ausbau der Beschleuniger in Berkeley (USA) und Dubna (UdSSR) möglich geworden, schwere Ionen bis etwa ^{40}Ar auf Energien von maximal 2 GeV pro Nukleon (bzw. C^{12} auf 4 GeV/N) zu beschleunigen.

Das neue Gebiet der Relativistischen Schwerionenphysik¹ hat daher gerade in den letzten Jahren einen bedeutenden Aufschwung genommen: das Verhalten von hochkomprimierter Kernmaterie bei hohen Temperaturen erlaubt uns hoffentlich Schlüsse auf die Zustandsgleichung der Kernmaterie bei hohen Dichten. Von besonderem Interesse ist dabei die Frage nach der Existenz von kollektiven Anregungszuständen der Kernmaterie und deren Einfluß auf die nukleare Zustandsgleichung. Da das Pion bei der starken Wechselwirkung der Nukleonen eine dominante Rolle spielt, haben sich die meisten Untersuchungen dieses Problems mit der Existenz von kollektiven Anregungen der Kernmaterie mit den Quantenzahlen des Pions beschäftigt²⁻⁶. Das Auftreten dieser kollektiven Pionen hängt sehr stark von der Kerndichte ρ ab: erst oberhalb einer kritischen Dichte ρ_{cr} , die in den realistischen Modellen⁵ bei etwa $\rho_{cr} \sim 2\rho_0$ (ρ_0 ist die nukleare Gleichgewichtsdichte) liegt, tritt die periodische Spin-Isospin-Struktur auf, die die Quantenzahlen des Pions trägt. Dabei handelt es sich nicht um die Kondensation reeller Pionen, sondern um ein Nukleon-Nukleonloch Kondensat von $p\bar{n}$

(d.h. π^+) bzw. $\bar{p}n$ (d.h. π^-) oder $n\bar{n}$ oder $p\bar{p}$ (d.h. π^0).

Die Quantenzahlen des Pions sind also an ein Teilchen-Loch Paar gebunden. Dieses "Pionen"-Kondensat bildet sich in unendlicher Kernmaterie bei einem kritischen Impuls

$k_c \sim 2m_\pi$. Zur Bestimmung dieser kritischen Parameter

wird der Propagator des Pions in der Kernmaterie untersucht^{7,8}

$$\Delta_\pi^{-1}(k, \omega) = \omega^2 - k^2 - m_\pi^2 - \Pi(k, \omega)$$

wobei $\Pi(k, \omega)$ der Polarisationsoperator ist, der den Einfluß der Kernmaterie auf das Pion beschreibt. Das Pion hat in Kernmaterie also eine effektive Masse

$$m_{\text{eff}}^2 = m_\pi^2 + \Pi(k, \omega)$$

Die Berechnung des Polarisationsoperators $\Pi(k, \omega)$ beruht auf der Anwendbarkeit der Störungstheorie, d.h. der Entwicklung der Pion-Nukleon-Wechselwirkung in Feynman -Diagramme, die dann zumeist in RPA-Näherung aufsummiert werden. Dieses Verfahren versagt jedoch völlig, sobald der normale Grundzustand, der zunächst nur nukleonische Freiheitsgrade beschreibt, auch Teile mit den Quantenzahlen des Pions enthält. Im Propagatorformalismus der Pionenkondensation zeigt sich dies darin, daß imaginäre (komplexe) Energien als Lösungen der Dispersionsgleichung auftreten. Sie signalisieren den Zerfall des alten Grundzustandes in den neuen Grundzustand mit nukleonischen und pionischen Quantenzahlen⁹. Neben dem beschriebenen Propagatorformalismus wurde das σ -Modell der Pion-Nukleon-Wechselwirkung auf die Beschrei-

bung der Pionenkondensation angewendet^{10,11}. In diesem Modell wird die Nukleonenmasse durch den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert des σ -Feldes erzeugt, d.h. es enthält bereits im Grundzustand ein σ -Kondensat. Das isoskalare σ -Feld und der Isovektor des Pionenfeldes bilden zusammen einen Vierervektor bezüglich der "chiralen" Gruppe $SU(2) \otimes SU(2)$. Aufgrund der chiralen $SU(2) \otimes SU(2)$ -Symmetrie läßt dieses Modell chirale Rotationen zu, die einen Zustand mit $\langle \sigma \rangle \neq 0$ in einen Zustand mit $\langle \pi \rangle \neq 0$ überführen können¹⁰. Das σ -Modell enthält also explizit die Möglichkeit der Pionenkondensation, d.h., es erlaubt also auch, den neuen Grundzustand zu beschreiben. Das σ -Modell ist allerdings ein Modell für ein Nukleon, d.h., keine Vielteilchentheorie im Gegensatz zum im Folgenden vorgeschlagenen Modell.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit soll dagegen ein Modell entwickelt werden, das - sich orientierend an Methoden aus der Festkörperphysik^{12,13} - die Möglichkeit des Phasenübergangs zunächst offenläßt. Es soll jedoch in der Lage sein, das kondensierte System im neuen Grundzustand auch jenseits des kritischen Punktes zu schreiben. Damit wird sich auch die Kondensationsenergie berechnen lassen, die ihrerseits die Zustandsgleichung der Kernmaterie modifiziert. Bei Dichten von etwa $\rho > (5-20)\rho_0$ erwartet man weitere Abänderungen der Zustandsgleichung der

hadronischen Materie durch einen Phasenübergang von der nukleonischen Materie zur Quarkmaterie^{14,15,16}. Da im Rahmen des Bagmodells¹⁷ Nukleonen als "Bags", d.h., als räumlich scharf begrenzte Raumbereiche, auf die die Quarkwellenfunktionen beschränkt sind (das sog. "Confinement"), beschrieben werden, erwartet man den Phasenübergang, sobald die Nukleonen stark überlappen. Die weitere Dynamik des "Riesen-Quark-Bags" sowie die kritische Dichte hängen sensitiv von den Eigenschaften der Quark-Quark-Wechselwirkung ab. Diese Wechselwirkung wird vermutlich durch den Austausch von Gluonen erzeugt und hat SU(3)-Struktur¹⁸. Sie ist sensitiv auf die Color-Quantenzahlen der Quarks. Wegen der acht Generatoren λ^i ($i = 1, \dots, 8$) der Farb-SU(3) gibt es acht Gluonen, die jeweils eine der drei möglichen Farben (rot, grün, blau) und eine "Anti"-Farbe tragen. Es liegt nahe, Kondensationsphänomene bezüglich der Farbquantenzahlen zu untersuchen. Im zweiten Teil der Arbeit werden die damit verbundenen Fragen diskutiert.

2. Phasenübergänge in unendlicher Materie

Zunächst sollen die Phasenübergänge untersucht werden, die den Dichtebereich betreffen, in dem man von intakten Nukleonen im Kern sprechen kann, d.h., wo die Nukleonen nicht so weit überlappen, daß die innere Struktur des Nukleons eine Rolle spielt. In diesem Bereich wird das Nukleon durch seine Spin- bzw. Isospinquantenzahlen beschrieben; wir werden also zunächst Kondensationsphänomene bezüglich dieser Quantenzahlen untersuchen. Dazu benötigen wir eine phänomenologische Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung im Spin-Isospinraum. Eine solche Wechselwirkung wurde von Landau¹⁹ und Migdal²⁰ im Rahmen der Theorie der Fermiflüssigkeiten abgeleitet.

2.1 Die Landau-Migdal-Theorie der Fermiflüssigkeiten

Bei der Ableitung seiner Theorie der Fermiflüssigkeiten¹⁹ ging Landau von der Idee eines Systems von Quasiteilchenanregungen, die sich wie Teilchen verhalten, aus. Die Eigenschaften dieses Systems werden durch die Wechselwirkungen modifiziert. Die Dynamik dieses Systems wird durch eine Boltzmann-Gleichung beschrieben²¹:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial \rho}{\partial \vec{p}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{x}} = S(\rho) \quad (2.1)$$

Dabei sind $\rho, \epsilon, \vec{p}$ Dichte, Energie und Impuls der Quasi-

teilchen. $S(\vartheta)$ ist der übliche Stoßterm. Multipliziert man mit p_i und integriert über $d\tau = g \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$ (g ist der statistische Entartungsfaktor) und beachtet, daß

$$\int p_i S(\vartheta) d\tau = 0 \quad (2.2)$$

wegen der Impulserhaltung bei jedem Stoß, so folgt die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_i \vartheta d\tau + \frac{\partial}{\partial x} \int p_i \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \vartheta d\tau + \frac{\partial}{\partial x_i} \int p \epsilon d\tau - \int \epsilon \frac{\partial p}{\partial x_i} d\tau = 0 \quad (2.3)$$

nach partieller Integration von (2.1). Um diesen Ausdruck in der Form eines Erhaltungsgesetzes

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_i \vartheta d\tau + \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (2.4)$$

schreiben zu können, und damit auch die Impulserhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \int p_i \vartheta d\tau = 0 \quad (2.5)$$

ableiten zu können (π_{ik} ist der Impulsflußtensor, der auf der Oberfläche des Volumens, über das integriert wird, verschwinden soll), müßte man in

$$\int \epsilon \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} d\tau \quad (2.6)$$

die Ortsableitung vor das Integral ziehen können, d.h.,

$\epsilon(p) \delta \vartheta(p)$ muß das Differential einer Größe E sein:

$$\delta E = \int \epsilon(p) \delta \vartheta(p) d\tau \quad (2.7)$$

und damit

$$\int \epsilon \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} d\tau = \frac{\partial}{\partial x_i} E \quad (2.8)$$

E ist aber gerade die Energie des Systems pro Einheits-

volumen, d.h., allgemein konnte Landau annehmen

$$\frac{\delta E}{\delta g(p)} = \epsilon(p) \quad (2.9)$$

d.h., man erhält die Quasiteilchenenergie, indem man die Energie bezüglich der Quasiteilchenzahl variiert. Die Energie ist ein Funktional der Besetzungszahlen $n(p)$ aller Quasiteilchen: $E = E\{n(p_1), n(p_2), \dots\}$, d.h., ändert man $n(p)$ in $n(p) = n_0(p) + \delta n(p)$, so erhält man $E' = E\{\delta n(p_1), \delta n(p_2), \dots\}$, d.h.,

$$\delta E = E - E' = \sum \epsilon^{(0)}(\vec{p}) \delta n(\vec{p}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} f(\vec{p}, \vec{p}') \delta n(\vec{p}) \delta n(\vec{p}') \quad (2.10)$$

Diese Beziehung definiert $f(\vec{p}, \vec{p}')$ als zweite Funktionalableitung der Energie bezüglich der Quasiteilchenbesetzungszahl. Mit (2.10) folgt:

$$\epsilon(\vec{p}) = \frac{\delta E}{\delta n(\vec{p})} = \epsilon^{(0)}(\vec{p}) + \sum_{\vec{p}'} f(\vec{p}, \vec{p}') \delta n(\vec{p}') \quad (2.11)$$

Wie man an (2.10) sieht, ist $f(\vec{p}, \vec{p}')$ gerade die Quasiteilchenwechselwirkung, da es die Änderung der Energie bei Entfernung der Quasiteilchen in den Zuständen $\vec{p}$ und $\vec{p}'$ angibt. Eine weitere Annahme besteht nun darin, daß nur die Quasiteilchen an der Fermikante betrachtet werden, d.h., $f(\vec{p}, \vec{p}')$ ist nur an der Fermikante definiert. Ersetzt man die Impulse durch den Fermiimpuls, so verbleibt als einzige Abhängigkeit in einem isotropen System nur noch der Winkel zwischen den Impulsen $\vec{p}$ und $\vec{p}'$. Da Nukleonen jedoch auch Spin- und Isospinquantenzahlen tragen, wird $f(\vec{p}, \vec{p}')$ im

Allgemeinen ersetzt durch²²

$$F(\vec{p}, \vec{p}') = f(\vec{p}, \vec{p}') + g(\vec{p}, \vec{p}')(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \\ + f'(\vec{p}, \vec{p}')(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + g'(\vec{p}, \vec{p}')(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (2.12)$$

wobei $\vec{\sigma}$ und $\vec{\tau}$ die üblichen Paulimatrizen im Spin- bzw. Isospinraum sind. Da f , g , f' , und g' nur vom Winkel zwischen $\vec{p}$ und $\vec{p}'$ abhängen, liegt es nahe, sie nach Legendrepolynomen zu entwickeln: z.B.

$$f = \sum_{\ell} f_{\ell} P_{\ell}(\cos \vartheta) \quad (2.13)$$

Dabei hofft man, daß diese Reihen schnell konvergieren, d.h., daß nur wenige Multipole wichtig sind. In der Tat haben Rechnungen von Bäckman²³ gezeigt, daß dies der Fall ist. Weiterhin lassen sich für die Koeffizienten f_1 , g_1 , f'_1 , g'_1 Summenregeln ableiten²⁴: man kann die Streuamplitude schreiben als:

$$A(\vec{p}, \vec{p}') = B(\vec{p}, \vec{p}') + C(\vec{p}, \vec{p}')(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \\ + D(\vec{p}, \vec{p}')(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + E(\vec{p}, \vec{p}')(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (2.14)$$

und entwickelte nun diese Koeffizienten analog:

$$\text{z.B.} \quad B = \sum_{\ell} B_{\ell} P_{\ell}(\cos \vartheta) \quad (2.15)$$

Wechselwirkung und Streuamplitude sind verknüpft durch die Integralgleichung

$$A(\vec{p}_1, \vec{\sigma}_1, \vec{\tau}_1; \vec{p}', \vec{\sigma}', \vec{\tau}') = F(\vec{p}_1, \vec{\sigma}_1, \vec{\tau}_1; \vec{p}', \vec{\sigma}', \vec{\tau}') \\ - \frac{1}{4} \text{Spur } \vec{\sigma}' \vec{\sigma} \int F(\vec{p}_1, \vec{\sigma}_1, \vec{\tau}_1; \vec{k}, \vec{\sigma}', \vec{\tau}') A(\vec{k}, \vec{\sigma}', \vec{\tau}'; \vec{p}', \vec{\sigma}_2, \vec{\tau}_2) \frac{d\Omega_k}{4\pi} \quad (2.16)$$

Setzt man die Entwicklungen (2.13) und (2.14) ein, so folgen für die Koeffizienten folgende Relationen:

$$\begin{aligned} B_l &= \frac{f_l}{1 + \frac{f_l}{2l+1}} & ; & & C_l &= \frac{g_l}{1 + \frac{g_l}{2l+1}} \\ D_l &= \frac{f'_l}{1 + \frac{f'_l}{2l+1}} & ; & & E_l &= \frac{g'_l}{1 + \frac{g'_l}{2l+1}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Da die Vorwärtsstreuamplitude für zwei gleiche Teilchen mit gleichen Spin- und Isospinprojektionen und Impulsen wegen der Antisymmetrie der Wellenfunktion verschwinden muß, erhält man die Summenregel

$$S = \sum_{l=0}^{\infty} (B_l + C_l + D_l + E_l) = 0 \quad (2.18)$$

Da die physikalischen Anwendungen oft nur die Terme mit $l = 0$ mitgenommen werden, erhält man in diesem Fall die Summenregel

$$\frac{f_0}{1+f_0} + \frac{f'_0}{1+f'_0} + \frac{g_0}{1+g_0} + \frac{g'_0}{1+g'_0} = 0 \quad (2.19)$$

Es erscheint jedoch als äußerst fraglich, ob die $l = 0$ Terme die Summenregel bereits ausschöpfen, denn "experimentell" sind alle Kopplungskonstanten positiv, d.h., die Summenregel kann gar nicht erfüllt werden, solange nicht ein Teil der Kopplungskonstanten negativ werden.

Neben den Summenregeln sind die Beziehungen von f_0 , f'_0 , g_0 , g'_0 zu physikalisch relevanten Größen von besonderer Bedeutung²⁰: für f_0 und f'_0 sind solche Relationen bekannt.

Die nukleare Symmetrieenergie ist

$$E_s = \beta \frac{(N-Z)^2}{A} \quad (2.20)$$

wobei $\beta = \frac{1}{3} \epsilon_F (1 + 2 f_0')$, während die nukleare Kompressionskonstante

$$K = 6\epsilon_F (1 + 2f_0) \quad \text{ist.} \quad (2.21)$$

Die effektive Masse m^* des Quasiteilchens dagegen ist mit f_1 verknüpft:

$$m^* = m (1 + \frac{2}{3} f_1) \quad (2.22)$$

g_0 und g_0' sind mit den magnetischen Momenten verknüpft.

Der Vergleich mit den experimentellen Daten liefert²⁰:

f_0	1 ± 0.2
f_0'	0.3 ± 0.1
g_0	~ 0.5
g_0'	0.6 ± 0.2

Es muß jedoch betont werden, daß die Werte in der Literatur (siehe z.B. Ref. 24) sehr stark schwanken (auch Vorzeichen sind teilweise unterschiedlich). Für die späteren Rechnungen verwenden wir die Landau-Migdal-Wechselwirkung mit $l = 0$, d.h.

$$U = \left(\frac{d\rho}{d\epsilon_F} \right)^{-1} \left[f_0 + f_0' \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + g_0 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + g_0' \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right] \quad (2.23)$$

Der Vorfaktor $C = \left(\frac{dy}{d\epsilon_F} \right)^{-1}$ macht f_0 , usw. dimensionslos; wir werden ihn jedoch später in die Parameter f_0 , f_0' , g_0 und g_0' absorbieren. In dieser Näherung ($k = 0$) entspricht die Wechselwirkung U im Ortsraum einer Kraft mit verschwindender Reichweite, d.h., sie beschreibt den Hardcore der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung durch ω - und ρ -Meson Austausch recht gut. Wie der langreichweitige Anteil der N-N-Wechselwirkung, d.h., der π -Austausch zu berücksichtigen ist, werden wir später beschreiben.

Das in (2.23) angegebene Potential ist - bis auf die Ortsabhängigkeit - das allgemeinste Potential, das mit Paritätsinvarianz, Zeitumkehrvarianz und Ladungsunabhängigkeit vereinbar ist²⁵. Es wurde von verschiedenen Autoren^{20,26} zur Berechnung von Kernspektren, magnetischen Momenten usw. verwendet. Die Wahl der Parameter f_0 , f_0' , g_0 und g_0' ist im Rahmen des Vergleichs mit dem Experiment relativ großen Schwankungen unterworfen. Dennoch liefert diese Wechselwirkung in den einzelnen Fällen recht gute Übereinstimmung mit dem Experiment.

Die einzelnen Terme der Wechselwirkung lassen sich aus der fundamentalen, nichtrelativistischen, pseudovektoriellen Pion-Nukleon-Wechselwirkung ableiten²⁵: der Hamiltonoperator ist

$$H = f\mu^{-1} \sum_{i=1}^2 \int d\vec{r} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{\tau}_{(i)} \cdot (\vec{\sigma}_{(i)} \cdot \nabla \vec{\phi}(\vec{r})) \quad (2.24)$$

Man kann zeigen²⁷, daß dieser Hamiltonoperator der nicht-relativistische Grenzfall der pseudoskalaren Kopplung ist

$$\mathcal{L}_{int} \sim i g \bar{\psi} \gamma_5 \vec{\tau} \psi \vec{\phi} \quad (2.25)$$

Nach Anwenden einer verallgemeinerten Foldy-Wouthousen-Transformation liefert (2.25) eine dem Hamiltonoperator 2.24 entsprechende Lagrangefunktion. Da (2.24) eine festgehaltene Punktquelle enthält, kann man die daraus resultierende Klein-Gordon-Gleichung lösen und ein Nukleon-Nukleon-Potential ableiten: das Ein-Pion-Austauschpotential, das einen Term mit Reichweite Null enthält, der gerade einem Term aus (2.23) entspricht

$$V_{OPEP} \sim - \frac{f^2}{3\mu^3} \frac{m_\pi^2}{\hbar c} (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \delta(\vec{r}) \quad (2.26)$$

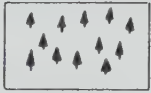
Die Struktur der Wechselwirkung (2.23) scheint also durchaus von einer Lagrangefunktion der Art (2.25) ableitbar zu sein, dh., wir können (2.23) als Basis der Untersuchung der Kondensationsphänomene des Viel nukleonsystems verwenden, müssen bei der Interpretation der Resultate jedoch stets die explizite Impulsabhängigkeit der Kopplungskonstanten berücksichtigen.

2.2 Die Störungstheorie im kondensierten Zustand

Es ist ein allgemein bekanntes Phänomen¹², daß ein System von wechselwirkenden Teilchen, das sich in seinem "normalen"

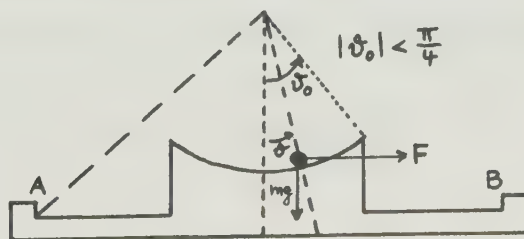
Grundzustand befindet, plötzlich instabil werden und in einen neuen "kondensierten" Zustand übergehen kann, der sich durch völlig neue physikalische Eigenschaften auszeichnet. Beispiele eines solchen Phasenübergangs sind: der Übergang vom Gas zur Flüssigkeit, wenn die Temperatur oder der Druck über einen bestimmten Punkt (den kritischen Punkt) erniedrigt bzw. erhöht wird. Ein weiteres Beispiel, das wir im weiteren oft wegen der Analogie zum Kern zitieren werden, ist der Ferromagnet, bei dem die Elektronen-Spins unterhalb einer kritischen Temperatur (Curietemperatur) alle parallel ausgerichtet sind. Diese Beispiele zeigen, daß der Phasenübergang stets mit der Brechung einer Symmetrie verknüpft ist: der Ferromagnet z.B. ist nach dem Phasenübergang nicht mehr rotationssymmetrisch. Ein weiteres Kennzeichen der kondensierten Phase ist die Existenz einer langreichweitigen Ordnung: oberhalb von T_C ist z.B. das ferromagnetische System in der normalen (paramagnetischen) Phase: die Wechselwirkung zwischen den Spins ist zu schwach, um weiter entfernte Spins auszurichten (kurzreichweitige Ordnung); unterhalb von T_C beginnen alle Spins, auch wenn sie durch makroskopische Distanzen getrennt sind, sich parallel auszurichten, d.h., die Ordnung ist langreichweitig. Die Wechselwirkung zwischen den Spins wird also so stark, daß sie "durchgreifen" kann, dh., auch weiter entfernte Spins ausrichtet. Die langreichweitige Ordnung ist durch einen Ordnungsparameter gekennzeichnet; im Falle des

Ferromagneten ist dies die Magnetisierung M , die proportional ist zum Gesamtspin des Systems. In der Tabelle sind weitere Phasenübergangstypen mit den jeweils gebrochenen Symmetrien und den Ordnungsparametern angegeben¹².

Normale Phase	Kondensierte Phase	Gebrochene Symmetrie	Parameter der langreichweitg. Ordng.
 Paramagnet	 Ferromagnet	Rotation	Magnetisierung
 Gas	 Festkörper	Translation Rotation	ρ_x , Amplitude d. x -ten Fourier Komponente der Dichte wobei x = reziproker Gittervektor
 Normaler Leiter	 Supraleiter	Globale Eichsymmetrie	Paar-Erzeugungsamplitude
 Paramagnet	 Spindichte Wellie Antiferromagnet	Rotation Translation	S_Q , Amplitude d. Q -ten Fourier Komponente der Spindichte

Der Ordnungsparameter dient weiterhin dazu, die "Ordnung" des Phasenübergangs zu bestimmen: man spricht von einem Phasenübergang 2. Ordnung, wenn sich der Ordnungsparameter stetig ändert, wenn man von der normalen Phase zur kondensierten übergeht, seine erste Ableitung dagegen unstetig

ist. Der Phasenübergang ist 1. Ordnung, wenn der Ordnungsparameter selbst bereits unstetig ist. Die wohl folgenreichste Konsequenz des Phasenübergangs macht sich im Einteilchenspektrum des Fermisystems bemerkbar: in der normalen Phase bestimmt man das Dispersionsgesetz $\omega(k)$ der Quasiteilchen aus dem Einteilchenpropagator. Dazu benötigt man jedoch die eigentliche Selbstenergie, die nur als störungstheoretische Entwicklung in jeweiligem Grundzustand darzustellen ist (Feynman-Diagramme). Wenn diese Diagramme (wie üblich) bezüglich des normalen Grundzustandes ausgewertet werden, bricht die Störungstheorie im normalen Grundzustand zusammen, sobald das System einen neuen (kondensierten) Grundzustand annimmt. In der Dispersionsrelation treten dann formal komplexe Energien auf, die signalisieren, daß der alte Grundzustand zerfällt. Der Zusammenbruch der Störungstheorie in der normalen Phase läßt sich an einem von Mattuck¹² angegebenen Beispiel aus der klassischen Mechanik gut illustrieren: eine Kugel schwingt in einem Kreissegment unter dem Einfluß einer Kraft F . Ihre stabile Lage $\vartheta(F/mg)$ ist durch die Störungstheorie in Potenzen von F gegeben als:



$$\vartheta = \frac{F}{mg} - \frac{1}{3} \left(\frac{F}{mg} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{F}{mg} \right)^5 - \dots = \arctan \frac{F}{mg}$$

Die Reihe liefert ein mathematisch richtiges Resultat für $|F/mg| < 1$ oder $-\frac{1}{4}\pi < \vartheta < \frac{1}{4}\pi$. Physikalisch jedoch bricht die Reihe zusammen, wenn $|\vartheta| > |\vartheta_0|$, d.h., wenn die Kugel einen "Phasenübergang" durchmacht, vom Kreissegment herunterfällt und nach A oder B rollt. Es nützt auch nichts, wenn man die Störungsreihe in beliebig hoher Ordnung summiert, d.h., den $\arctan(F/mg)$ verwendet. Die Störungsreihe kann den neuen Grundzustand nicht beschreiben. - Es läßt sich nun generell zeigen, daß die normale Störungstheorie in jeder kondensierten Phase versagt¹². Der Grund dafür ist - wie bei unserem klassischen Modell - das Auftreten "anomaler" Prozesse. Dies läßt sich wiederum am Beispiel des Ferromagneten leicht erläutern; in der normalen Phase des Systems ohne äußeres Feld kommt ein Probeteilchen wegen der Impulserhaltung im Mittel mit dem gleichen Impuls und Spin aus dem System heraus, mit dem es in das System eingelaufen ist. In der ferromagnetischen Phase ist dies anders: aufgrund des inneren Feldes, das die Spins ausrichtet, wird der Spin des Probeteilchens immer bevorzugt in Richtung der Magnetisierung umgeklappt werden. In der ferromagnetischen Phase hat man also neben dem normalen Propagator ohne Spinumklappung (T ist der Zeitordnungsoperator)

$$G(\vec{k}\uparrow, t'-t) = -i \langle \phi_0 | T \{ c_{k\uparrow}(t') c_{k\uparrow}^\dagger(t) \} | \phi_0 \rangle$$

$$G(\vec{k}\downarrow, t'-t) = -i \langle \phi_0 | T \{ c_{k\downarrow}(t') c_{k\downarrow}^\dagger(t) \} | \phi_0 \rangle \quad (2.27)$$

auch anomale Propagatoren, die den Spinumklapprozess beschreiben:

$$\begin{aligned} G(\vec{k}_\downarrow, \vec{k}'_\uparrow, t'-t) &= -i \langle \phi_0 | T \{ C_{k\downarrow}(t') C_{k\uparrow}^\dagger(t) \} | \phi_0 \rangle \\ G(\vec{k}'_\uparrow, \vec{k}_\downarrow, t'-t) &= -i \langle \phi_0 | T \{ C_{k\uparrow}(t') C_{k\downarrow}^\dagger(t) \} | \phi_0 \rangle \end{aligned} \quad (2.28)$$

In der normalen Phase verschwinden diese Propagatoren. Der Grund für das Versagen der Störungstheorie liegt also darin, daß sie die anomale Propagation nicht berücksichtigt.

Es liegt nun nahe, die einzelnen Propagatoren in (2.27) und (2.28) zu einem verallgemeinerten Matrixpropagator zusammenzufassen²⁸:

$$G_{\text{fer}} = -i \begin{pmatrix} \langle \phi_0 | T \{ C_{k\uparrow}(t') C_{k\uparrow}^\dagger(t) \} | \phi_0 \rangle & \langle \phi_0 | T \{ C_{k\uparrow}(t') C_{k\downarrow}^\dagger(t) \} | \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0 | T \{ C_{k\downarrow}(t') C_{k\uparrow}^\dagger(t) \} | \phi_0 \rangle & \langle \phi_0 | T \{ C_{k\downarrow}(t') C_{k\downarrow}^\dagger(t) \} | \phi_0 \rangle \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

bzw. wenn man die Spinoroperatoren

$$\gamma_k(t) = \begin{pmatrix} C_{k\uparrow}(t) \\ C_{k\downarrow}(t) \end{pmatrix} ; \quad \gamma_k^\dagger(t) = (C_{k\uparrow}^\dagger(t), C_{k\downarrow}^\dagger(t)) \quad (2.30)$$

eingführt, als

$$G_{\text{fer}}(\vec{k}, t'-t) = -i \langle \phi_0 | T \{ \gamma_k(t') \otimes \gamma_k^\dagger(t) \} | \phi_0 \rangle \quad (2.31)$$

Die von uns im weiteren betrachteten Wechselwirkungen werden von der Form sein:

$$H = \sum_k (\epsilon_k - \mu) C_{k\sigma}^\dagger C_{k\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{klmn \\ \sigma\sigma'}} V_{klmn} C_{l\sigma'}^\dagger C_{k\sigma}^\dagger C_{m\sigma} C_{n\sigma'} \quad (2.32)$$

Man kann diese Wechselwirkung mit den Operatoren (2.30) schreiben als:

$$H = \sum_k (\epsilon_k - \mu) \gamma_k^\dagger \gamma_k + \frac{1}{2} \sum_{klmn} V_{klmn} (\gamma_k^\dagger \gamma_l) (\gamma_k^\dagger \gamma_m) \quad (2.33)$$

d.h., sowohl G als auch H haben in den Operatoren γ_k die gleiche Form wie in den Operatoren C_k ! Daraus folgt, daß die störungstheoretische Entwicklung (Feynman-Diagramme) unverändert bleibt, daß anstelle des normalen Propagators jedoch der Matrixpropagator zu verwenden ist. Der Propagator der Quasiteilchen im normalen Grundzustand ist in diesem Rahmen diagonal. Für den freien Hamiltonoperator von (2.33) ist er im Impulsraum durch

$$G_{0\text{fer}}(\vec{k}, \omega) = -i \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega - (\epsilon_k - \mu) + i\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega - (\epsilon_k - \mu) + i\delta} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

d.h., die Pole der freien Greenfunktion sind gerade die Einteilchenenergien $\epsilon_k - \mu$. Um die Greenfunktion des wechselwirkenden Systems zu berechnen, benötigen wir die Selbstenergie Σ . Wir werden die Selbstenergie im weiteren stets in Hartree-Fock-Näherung berechnen.

2.3 Die Dysongleichung

Im normalen Grundzustand ist der Propagator in Hartree-Fock-Näherung graphisch gegeben durch:

$$G \approx G_0 + G_0 \Sigma G_0 + G_0 \Sigma G_0 \Sigma G_0 + \dots \quad (2.35)$$

Die darin enthaltenen Graphen bilden geometrische Reihen und lassen sich aufsummieren¹²:

$$\uparrow \uparrow \approx \frac{1}{\uparrow^{-1} - \{ \text{m} \bigcirc + \text{m} \}} \quad (2.36)$$

wobei $\uparrow$ den freien Propagator bezeichnet. Ausgeschrieben lautet (2.36):

$$G(\vec{k}, \omega) = [G_0^{-1}(\vec{k}, \omega) - \Sigma_{\text{HF}}]^{-1} \quad (2.37)$$

wobei die Hartree-Fock-Selbstenergie gegeben ist durch

$$\Sigma_{\text{HF}} = \text{m} \bigcirc + \text{m} \quad (2.38)$$

(2.37) wird als Dysongleichung für die Greensfunktion $G(k, \omega)$ bezeichnet. Sie ist jedoch in dieser Form noch nicht selbstkonsistent¹². Um dies zu erreichen, muß man in (2.38) den freien Propagator durch den vollen Propagator ersetzen, d.h.,

$$\Sigma_{\text{HF}} = \text{m} \bigcirc + \text{m} \quad (2.39)$$

d.h., Σ_{HF} selbst hängt von $G(k, \omega)$ ab. Die Dysongleichung ist daher oft nur iterativ zu lösen: man beginnt mit der freien Greensfunktion auf der rechten Seite von (2.39) und iteriert (2.37) solange, bis Selbstkonsistenz erreicht ist. Die Verwendung der selbstkonsistenten Hartree-Fock-Näherung ist bei der Betrachtung von Phasenübergängen besonders wichtig: würden wir die normale Form (2.38) verwenden, so würden, da G_0 diagonal ist, alle Diagramme in Σ diagonal sein.

Damit wäre auch $G(\vec{k}, \omega)$ selbst eine Diagonalmatrix und daher unfähig, Kondensationsphänomene zu beschreiben. Verwendet man dagegen anstelle von $G_0(\vec{k}, \omega)$ die volle Greensfunktion $G(\vec{k}, \omega)$, so enthält auch $\Sigma(\vec{k}, \omega)$ nicht-diagonale Terme.

Grundgleichung für die folgenden Betrachtungen ist also die selbstkonsistente Dysongleichung in Hartree-Fock-Näherung

$$G(\vec{k}, \omega) = [G_0^{-1}(\vec{k}, \omega) - \Sigma_{\text{HF}}(G(\vec{k}, \omega))]^{-1} \quad (2.40)$$

Bei den Anwendungen müssen wir zunächst die Selbstenergie mit Hilfe eines Ansatzes für den vollen Propagator berechnen. Die Lösung der selbstkonsistenten Dysongleichung liefert dann die unbekannten Funktionen im Ansatz für den Propagator. Die Integration bezüglich $\vec{k}$ und ω liefert eine selbstkonsistente Gleichung für den Ordnungsparameter, deren Lösung den Phasenübergang beschreibt.

3. Phasenübergänge in Kernmaterie

Wir wollen nun den im Abschnitt 2 beschriebenen Formalismus auf unendliche Kernmaterie anwenden. Wir gehen dazu von der Migdal-Wechselwirkung (2.23) aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\alpha\beta,\gamma\delta;\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}} = & f_0 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\alpha\bar{\gamma}} \delta_{\beta\delta} \delta_{\beta\bar{\delta}} + f'_0 \tau_{\alpha\gamma}^i \tau_{\beta\delta}^i \delta_{\alpha\bar{\gamma}} \delta_{\beta\bar{\delta}} \\ & + g_0 \sigma_{\alpha\bar{\gamma}}^i \sigma_{\beta\bar{\delta}}^i \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + g'_0 \tau_{\alpha\gamma}^i \tau_{\beta\delta}^i \sigma_{\alpha\bar{\gamma}}^i \sigma_{\beta\bar{\delta}}^i \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dabei sind $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ die Isospinindizes und $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \dots$ die Spinindizes. Die Parameter f_0, f'_0, g_0, g'_0 enthalten hier den dimensionstragenden Faktor $C = \left(\frac{d\varphi}{d\epsilon_F} \right)_{\varphi_0}^{-1}$. Die Wechselwirkung (3.1) kann graphisch dargestellt werden als



$$(3.2)$$

d.h., wir haben den Einteilchenaustausch (auch Mehrteilchenaustausch) durch die effektive Wechselwirkung U ersetzt.

Diese effektive Wechselwirkung enthält in der Form (3.1)

nur den hard-core, d.h., sie beschreibt den Austausch von schweren ω - und ρ -Mesonen. Der langreichweitige Pion-Austausch ist in U nicht enthalten.

Um eine selbstkonsistente Gleichung für den Ordnungsparameter abzuleiten, müssen wir die Dysongleichung für die Spindichte, Isospindichte und Spin-Isospindichte lösen. Dazu verwenden

wir den folgenden Ansatz für die Greensfunktion (Matrix-propagator):

$$G_{\alpha\beta; \bar{\alpha}\bar{\beta}}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{4} \left[g(\vec{k}, \omega) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \delta_{\alpha\beta} \vec{\sigma}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \cdot \vec{S}(\vec{k}, \omega) + \vec{\tau}_{\alpha\beta} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \vec{T}(\vec{k}, \omega) + (\vec{\tau}_{\alpha\beta} \cdot \vec{T}(\vec{k}, \omega)) (\vec{\sigma}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \cdot \vec{S}(\vec{k}, \omega)) \right] \quad (3.3)$$

Diese Greensfunktion kann als Tensorprodukt einer Greensfunktion im Isospinraum

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} G_{pp} & G_{pn} \\ G_{np} & G_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

(n = Neutron, p = Proton)

und einer Greensfunktion im Spinraum

$$G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} G_{\uparrow\uparrow} & G_{\uparrow\downarrow} \\ G_{\downarrow\uparrow} & G_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

aufgefaßt werden:

$$G_{\alpha\beta; \bar{\alpha}\bar{\beta}} = G_{\alpha\beta} \otimes G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} G_{p\uparrow p\uparrow} & G_{p\uparrow p\downarrow} & G_{p\uparrow n\uparrow} & G_{p\uparrow n\downarrow} \\ G_{p\downarrow p\uparrow} & G_{p\downarrow p\downarrow} & G_{p\downarrow n\uparrow} & G_{p\downarrow n\downarrow} \\ G_{n\uparrow p\uparrow} & G_{n\uparrow p\downarrow} & G_{n\uparrow n\uparrow} & G_{n\uparrow n\downarrow} \\ G_{n\downarrow p\uparrow} & G_{n\downarrow p\downarrow} & G_{n\downarrow n\uparrow} & G_{n\downarrow n\downarrow} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

wobei z.B. $G_{p\downarrow n\uparrow} = \langle 0 | T \{ C_{p\downarrow} C_{n\uparrow}^\dagger \} | 0 \rangle$, d.h., ein Neutron mit Spin nach unten wird in ein Proton mit Spin nach oben umgewandelt. Daß die Greensfunktion (3.3) die Eigenschaften von (3.6) hat, sehen wir, wenn wir (3.3) in Matrixform explizit

ausschreiben:

$$G_{\alpha\beta, \bar{\alpha}\bar{\beta}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} g+S_z+T_z+S_zT_z & (S_x-iS_y)(1+T_z) & (1+S_z)(T_x-iT_y) & (T_x-iT_y)(S_x-iS_y) \\ (S_x+iS_y)(1+T_z) & g-S_z-T_z-T_zS_z & (T_x-iT_y)(S_x+iS_y) & (1-S_z)(T_x-iT_y) \\ (1+S_z)(T_x+iT_y) & (T_x+iT_y)(S_x-iS_y) & g+S_z+T_z-T_zS_z & (1-T_z)(S_x-iS_y) \\ (T_x+iT_y)(S_x+iS_y) & (1-S_z)(T_x+iT_y) & (1-T_z)(S_x+iS_y) & g-S_z-T_z+T_zS_z \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Da $\sigma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x \pm i\sigma_y)$ und $\tau_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_x \pm i\tau_y)$ Spin- bzw. Isospin-Auf- und Absteigeoperatoren sind, wird durch Vergleich mit (3.6) die Struktur von $G_{\alpha\beta, \bar{\alpha}\bar{\beta}}$ im Spin-Isospinraum sofort einsichtig. Weiterhin sieht man an (3.3) bzw. (3.7), daß

$$\text{Spur } G_{\alpha\beta, \bar{\alpha}\bar{\beta}} = g(\vec{h}, \omega) \quad (3.8)$$

$$\text{und } \text{Spur } \{(\sigma_i G)_{\alpha\beta, \bar{\alpha}\bar{\beta}}\} = S_i(\vec{h}, \omega) \quad (3.9)$$

$$\text{sowie } \text{Spur } \{(\tau_i G)_{\alpha\beta, \bar{\alpha}\bar{\beta}}\} = T_i(\vec{h}, \omega) \quad (3.10)$$

$$\text{Spur } \{(\tau_i \sigma_{i2} G)_{\alpha\beta, \bar{\alpha}\bar{\beta}}\} = T_i(\vec{h}, \omega) S_{i2}(\vec{h}, \omega) \quad (3.11)$$

Diese Relationen ermöglichen es uns, den Zusammenhang der zunächst noch unbekannten Funktionen $g(\vec{k}, \omega)$, $\vec{S}(\vec{k}, \omega)$ und $\vec{T}(\vec{k}, \omega)$ mit den physikalischen Observablen zu finden.

Wie im Anhang A gezeigt wird, ist die Fouriertransformierte der Teilchendichte gegeben durch

$$\rho(\vec{k}) = -i \text{Spur } G(\vec{k}, t=0^-) \quad (3.12)$$

Analog sind Spindichte, Isospindichte und Spin-Isospindichte gegeben durch

$$\begin{aligned}\Sigma_i(\vec{h}) &= -i \text{Spur} (\sigma_i G(\vec{h}, t=0^-)) \\ t_i(\vec{h}) &= -i \text{Spur} (\tau_i G(\vec{h}, t=0^-))\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$p_{ik}(\vec{h}) = -i \text{Spur} (\tau_i \sigma_k G(\vec{h}, t=0^-)) \quad (3.14)$$

$$(3.15)$$

d.h., mit (3.8) bis (3.11) folgt:

$$g(\vec{h}) = -i \int \frac{d\omega}{2\pi} g(\vec{h}, \omega) e^{-i\omega 0^-} \quad (3.16)$$

$$\Sigma_i(\vec{h}) = -i \int \frac{d\omega}{2\pi} S_i(\vec{h}, \omega) e^{-i\omega 0^-} \quad (3.17)$$

$$t_i(\vec{h}) = -i \int \frac{d\omega}{2\pi} T_i(\vec{h}, \omega) e^{-i\omega 0^-} \quad (3.18)$$

$$p_{ik}(\vec{h}) = -i \int \frac{d\omega}{2\pi} T_i(\vec{h}, \omega) S_k(\vec{h}, \omega) e^{-i\omega 0^-} \quad (3.19)$$

Die in (3.3) angegebene Greensfunktion stellt den allgemeinsten Ansatz dar: sie beinhaltet einen Skalar, einen Vektor im Spinraum, einen Vektor im Isospinraum und ein Spin-Isospintensor.

3.1 Lösung der Dysongleichung: Die selbstkonsistente Gleichung des Ordnungsparameters

Wir sind nun - versehen mit der Wechselwirkung (3.1) und der Greensfunktion (3.3) - in der Lage, die Selbstenergie in Hartree-Fock-Näherung zu berechnen und dann damit die Dysongleichung zu lösen. Zunächst berechnen wir jedoch die Selbst-

energie. In Hartree-Fock-Näherung ist sie gegeben durch:

$$\textcircled{\Sigma} \sim \textcircled{\text{---}} + \textcircled{\text{---}} = \Sigma_{(1)} + \Sigma_{(2)} \quad (3.20)$$

Da wir den Teilchenaustausch durch die effektive Wechselwirkung (3.1) ersetzen, erhält der Direktterm die folgende Form:

$$\textcircled{\text{---}} \longrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \gamma \bar{\gamma} \quad \delta \bar{\delta} \\ \text{---} \mathcal{U} \text{---} \\ \nwarrow \alpha \bar{\alpha} \quad \beta \bar{\beta} \end{array} \quad (3.21)$$

Die intermediäre Fermionenlinie habe dabei den Impuls $\vec{l}$ und die Frequenz ω . Nach den üblichen Feynmanregeln¹³ ist die direkte Selbstenergie gegeben durch:

$$\Sigma_{(1)\alpha\gamma\bar{\alpha}\bar{\gamma}} = -i \int \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{\beta\bar{\beta}\delta\bar{\delta}} \mathcal{U}_{\alpha\beta,\gamma\delta;\bar{\alpha}\bar{\beta},\bar{\gamma}\bar{\delta}} G_{\delta\beta,\bar{\delta}\bar{\beta}}(\vec{l},\omega) e^{-i\omega 0^-} \quad (3.22)$$

Setzen wir (3.1) und (3.3) ein und beachten, daß

$$\text{Spur } \vec{\tau} = \text{Spur } \vec{\sigma} = 0 \quad (3.23)$$

so folgt:

$$\Sigma_{(1)\alpha\gamma\bar{\alpha}\bar{\gamma}}(f_0) = -i f_0 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \int \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} g(\vec{l},\omega) e^{-i\omega 0^-} \quad (3.24)$$

und somit wegen (3.16) und

$$g = \int \frac{d^3\vec{h}}{(2\pi)^3} g(\vec{h}) \quad (3.25)$$

$$\Sigma_{(1)\alpha\gamma\bar{\alpha}\bar{\gamma}}(f_0) = f_0 g \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \quad (3.26)$$

Die Rechnung für die weiteren Terme der direkten Selbstenergie ist analog und wir erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned} \Sigma_{(1)\alpha\gamma\bar{\alpha}\bar{\gamma}} &= f_0 \gamma \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} + f_0' \vec{t}_{\alpha\gamma} \cdot \vec{t} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \\ &+ g_0 \delta_{\alpha\gamma} \vec{\sigma}_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \cdot \vec{\Sigma} + g_0' \tau_{\alpha\gamma}^i \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^k \rho_{ik} \end{aligned} \quad (3.27)$$

wobei $\vec{t}$, $\vec{\Sigma}$ und ρ_{ik} aus (3.17) - (3.19) analog zu (3.25) definiert sind.

Der Austauschterm $\Sigma_{(2)}$ geht im Rahmen der effektiven Wechselwirkung über in



$$\quad (3.28)$$

d.h. explizit:

$$\Sigma_{(2)\alpha\gamma\bar{\alpha}\bar{\gamma}} = i \int \frac{d^3 \vec{\ell}}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{\beta\bar{\beta}\delta\bar{\delta}} u_{\alpha\beta,\delta\gamma;\bar{\alpha}\bar{\beta},\bar{\delta}\bar{\gamma}} G_{\delta\bar{\beta},\bar{\delta}\bar{\beta}}(\vec{\ell},\omega) e^{-i\omega 0^-} \quad (3.29)$$

Bei der Ausführung der Summen ist zu beachten, daß

$$\sigma_i \sigma_k = \delta_{ik} + i \epsilon_{ikl} \sigma^l \quad (3.30)$$

und

$$\text{Spur} (\sigma_i \sigma_k) = 2 \delta_{ik} \quad (3.31)$$

Man erhält im Übrigen völlig analog:

$$\begin{aligned} \Sigma_{(2)\alpha\gamma,\bar{\alpha}\bar{\gamma}} &= \frac{1}{4} \left[-(f_0 + f_0' + g_0 + g_0') \gamma \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \right. \\ &+ (-f_0 - f_0' + g_0 + g_0') \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^i \Sigma_i \delta_{\alpha\gamma} + (-f_0 + f_0' - g_0 + g_0') \tau_{\alpha\gamma}^i t_i \delta_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \\ &\left. + (-f_0 + f_0' + g_0 - g_0') \tau_{\alpha\gamma}^i \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^k \rho_{ik} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Damit wird die gesamte Selbstenergie:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\gamma\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^{\text{HF}} = & \left\{ \frac{3}{4}f_0 - \frac{1}{4}(f'_0 + g_0 + g'_0) \right\} \rho \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \\ & + \left\{ \frac{5}{4}g_0 + \frac{1}{4}(-f_0 - f'_0 + g'_0) \right\} \delta_{\alpha\gamma} \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^i \Sigma_i \\ & + \left\{ \frac{5}{4}f'_0 + \frac{1}{4}(-f_0 - g_0 + g'_0) \right\} \tau_{\alpha\gamma}^i t_i \delta_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \\ & + \left\{ \frac{3}{4}g'_0 + \frac{1}{4}(-f_0 + f'_0 + g'_0) \right\} \tau_{\alpha\gamma}^i \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^k \rho_{ik} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die Dysongleichung lautet damit:

$$G_{\alpha\gamma\bar{\alpha}\bar{\gamma}} = [G_{0,\alpha\gamma\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^{-1} - \sum_{\alpha\gamma\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^{\text{HF}}]^{-1} = M_{\alpha\gamma\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^{-1} \quad (3.34)$$

wobei

$$\begin{aligned} M_{\alpha\gamma\bar{\alpha}\bar{\gamma}} = & F \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} - F_2 \delta_{\alpha\gamma} \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^i \Sigma_i - F_3 \tau_{\alpha\gamma}^i t_i \delta_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \\ & - F_4 \tau_{\alpha\gamma}^i \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^k \rho_{ik} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$F = \omega - (\epsilon_k - \mu) + i\delta - F_1 \rho \quad (3.36)$$

Dabei haben wir folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{4} (3 f_0 - f'_0 - g_0 - g'_0) \\ F_2 &= \frac{1}{4} (5 g_0 - f_0 - f'_0 + g'_0) \\ F_3 &= \frac{1}{4} (5 f'_0 - f_0 - g_0 + g'_0) \\ F_4 &= \frac{1}{4} (3 g'_0 - f_0 - f'_0 + g_0) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Um die Matrix $M_{\alpha\gamma\bar{\alpha}\bar{\gamma}}$ zu invertieren, wählen wir den folgenden Ansatz für die inverse Matrix

$$M_{\gamma\beta,\bar{\gamma}\bar{\beta}}^{-1} = A \delta_{\gamma\beta} \delta_{\bar{\gamma}\bar{\beta}} + B_\ell \delta_{\gamma\beta} \sigma_{\bar{\gamma}\bar{\beta}}^\ell + C_\ell \tau_{\gamma\beta}^\ell \delta_{\bar{\gamma}\bar{\beta}} + D_{\ell m} \tau_{\gamma\beta}^\ell \sigma_{\bar{\gamma}\bar{\beta}}^m \quad (3.38)$$

Dieser Ansatz ist der allgemeinste, denn $\mathbb{1}, \sigma, \tau$ und $\sigma\tau$ bilden eine vollständige Basis im von Spin und Isospin aufgespannten Tensorraum. Die unbekannten Koeffizienten A, B_1, C_1 und D_{1m} werden aus der Bedingung

$$(MM^{-1})_{\alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (3.39)$$

bestimmt. Diese Bedingung liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} AF - F_2 B_1 \sum_1 - F_3 C_1 t_1 - F_4 p_{1m} D_{1m} &= 1 \\ FB_1 - F_2 A \sum_1 - F_3 D_{1l} t_i - F_4 C_i p_{il} - i(F_2 \epsilon_{ikl} \sum_i B_k + F_4 \epsilon_{nml} p_{kn} D_{km}) &= 0 \\ FC_1 - F_2 D_{1i} \sum_i - F_3 A t_1 - F_4 B_i p_{li} - i(F_3 \epsilon_{ikl} C_k t_i + F_4 \epsilon_{ijl} D_{jm} p_{im}) &= 0 \\ FD_{1m} - F_2 C_1 \sum_m - F_3 t_l B_m - F_4 A p_{lm} + F_4 \epsilon_{ijl} \epsilon_{knm} p_{ik} D_{jn} \\ - i(F_2 \epsilon_{ikm} D_{lk} \sum_i + F_3 \epsilon_{ikl} D_{km} t_i + F_4 \epsilon_{kim} B_i p_{lk} + F_4 \epsilon_{ikl} C_k p_{im}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

von sechzehn Gleichungen für die Unbekannten A, B_1, C_1, D_{1m} . Da wir uns hauptsächlich für den Spin-Isospin-Freiheitsgrad, d.h., für den Freiheitsgrad, der dem Pion entspricht, interessieren (die Pion-Nukleon-Lagrangefunktion ist $\sim \sigma\tau$), vernachlässigen wir zunächst den reinen Spin- und den reinen Isospinanteil, d.h., wir setzen in der Selbstenergie $F_2 = F_3 = 0$. Damit vereinfacht sich das Gleichungssystem (3.40): man erhält $D_{1m} = D p_{1m}$ sowie $C_i = B_i = 0$ und aus (3.40) wird:

$$\begin{aligned} AF - F_4 D p_{1m}^2 &= 1 \\ F_4 p_{1m}^A + F p_{1m}^D + F_4 \epsilon_{ijl} \epsilon_{knm} p_{ik} p_{jn}^D &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

d.h., wir haben zehn Gleichungen für A und D.

Man kann nun eine Rotation im Spin-Isospinraum ausführen, so daß p_{ik} diagonal (d.h. auf Hauptachsen) ist. Weiterhin nehmen wir an, daß nur $p_{zz} = p \neq 0$ ist, d.h., die Spin-Isospindichte hat nur eine zz-Komponente. Diese Annahme entspricht der im konventionellen Pionenkondensationsmodell üblichen Annahme, daß das Pionenkondensat als ebene Welle in z-Richtung im unendlichen System angenommen wird³. Damit wird

$$\varepsilon_{ijz} \varepsilon_{knz} p_{ik} p_{jn} = 2(p_{xx} p_{yy} - p_{xy} p_{yx}) = 0 \quad (3.42)$$

Das Gleichungssystem (3.41) läßt sich nun lösen und man erhält:

$$A = \frac{F}{(F-F_4 p) (F+F_4 p)} ; \quad D = \frac{F_4}{(F-F_4 p) (F+F_4 p)} \quad (3.43)$$

Mit den Abkürzungen: $F_4 = -\frac{1}{4}\beta$, $\Omega = \omega - (\epsilon_k - \mu) + i\delta$
d.h., $\alpha = 3 f_0 - f_0' - g_0 - g_0'$ und $\beta = f_0 - f_0' - g_0 - 3g_0'$
läßt sich nun die Dysongleichung nach $g(k, \omega)$ und $P(k, \omega)$ auflösen:

$$g(\vec{\ell}, \omega) = \frac{4\Omega - \alpha g}{(\Omega - \frac{1}{4}\alpha g + \frac{1}{4}\beta p)(\Omega - \frac{1}{4}\alpha g - \frac{1}{4}\beta p)} \quad (3.44)$$

$$P(\vec{\ell}, \omega) = \frac{-\beta}{(\Omega - \frac{1}{4}\alpha g + \frac{1}{4}\beta p)(\Omega - \frac{1}{4}\alpha g - \frac{1}{4}\beta p)} p \quad (3.45)$$

$$\text{d.h.} \quad \omega_{\pm} = \epsilon_k + \frac{1}{4}\alpha g \pm \frac{1}{4}\beta p \quad (3.46)$$

sind die Quasiteilchenenergien der Quasiteilchen mit den Spin-Isospin-Komponenten $\pm p$. Die entsprechenden Quasiteilchenpropagatoren sind

$$g_{\pm}(\vec{k}, \omega) = [\Omega - \frac{1}{4}\alpha g \pm \frac{1}{4}\beta p]^{-1} \quad (3.47)$$

Daher können wir (3.44) und (3.45) schreiben als

$$\begin{aligned} g(\vec{l}, \omega) &= 2 (g_+(\vec{l}, \omega) + g_-(\vec{l}, \omega)) \\ p(\vec{l}, \omega) &= 2 (g_+(\vec{l}, \omega) - g_-(\vec{l}, \omega)) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Die den Energien $\omega_{\pm}$ entsprechenden Fermiimpulse sind

$$k_F^{\pm} = [2m(\mu - \frac{1}{4}\alpha g \pm \frac{1}{4}\beta p)]^{1/2} \quad (3.49)$$

Wir definieren nun

$$g_{\pm}(\vec{k}) = -i \int \frac{d\omega}{2\pi} g_{\pm}(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega 0^-} \quad (3.50)$$

Da $g_{\pm}(l, \omega) = [\omega - (\omega_{\pm} - \mu) + i\delta]^{-1}$ kann man das Integral (3.50) mit Hilfe des Residuensatzes ausführen: man erhält:

$$g_{\pm}(\vec{k}) = \begin{cases} 1 & k < k_F^{\pm} \\ 0 & k > k_F^{\pm} \end{cases} \quad (3.51)$$

Integrieren wir (3.48) bezüglich ω und k , so folgt mit (3.51) und (3.19)

$$g = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [g_+(k) + g_-(k)] \quad (3.52)$$

und

$$p = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [g_+(k) - g_-(k)] \quad (3.53)$$

Die Integrationen über k ergeben:

$$g = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2} \left\{ \left(\mu - \frac{1}{4}\alpha g + \frac{1}{4}\beta p \right)^{3/2} + \left(\mu - \frac{1}{4}\alpha g - \frac{1}{4}\beta p \right)^{3/2} \right\} \quad (3.54)$$

und

$$p = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2} \left\{ \left(\mu - \frac{1}{4}\alpha g + \frac{1}{4}\beta p \right)^{3/2} - \left(\mu - \frac{1}{4}\alpha g - \frac{1}{4}\beta p \right)^{3/2} \right\} \quad (3.55)$$

Wir führen nun die Spin-Isospin-"Polarisierung" als

$$M_p = \frac{p}{g} \quad (3.56)$$

ein. Mit der Fermienergie

$$\epsilon_F = \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} \frac{1}{2m} g^{2/3} \quad (3.57)$$

folgt aus (3.54) und (3.55)

$$g = \frac{g}{2\epsilon_F^{3/2}} \left\{ \left(\mu - \frac{1}{4}\alpha g + \frac{1}{4}\beta g M_p \right)^{3/2} + \left(\mu - \frac{1}{4}\alpha g - \frac{1}{4}\beta g M_p \right)^{3/2} \right\} \quad (3.58)$$

$$M_p = \frac{1}{2\epsilon_F^{3/2}} \left\{ \left(\mu - \frac{1}{4}\alpha g + \frac{1}{4}\beta g M_p \right)^{3/2} - \left(\mu - \frac{1}{4}\alpha g - \frac{1}{4}\beta g M_p \right)^{3/2} \right\} \quad (3.59)$$

Durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen erhalten wir die selbstkonsistente Gleichung für den Ordnungsparameter M_p :

$$\frac{\beta g}{2\epsilon_F} = \frac{1}{M_p} \left[(1+M_p)^{2/3} - (1-M_p)^{2/3} \right] \quad (3.60)$$

Diese Gleichung entspricht der in der Theorie des Ferromagneten bekannten Stonergleichung¹². In der normalen Phase ist $M_p = 0$, in der kondensierten Phase wird M_p maximal $M_p = 1$. Um den Phasenübergangspunkt zu ermitteln,

entwickeln wir die rechte Seite von (3.60) für $M_p \sim 0$.

Die kritische effektive Kopplungskonstante ist

$$\left(\frac{\beta g}{2\epsilon_F} \right)_{cr} = \frac{4}{3} \quad (3.61)$$

Um die explizite Dichteabhängigkeit der effektiven Kopplungskonstante zu bestimmen, ziehen wir aus den in β enthaltenen Konstanten die Dichteabhängigkeit heraus:

$$\frac{\beta g}{2\epsilon_F} = \left(\frac{d\epsilon_F}{dg} \right)_{g=g_0} \frac{\tilde{\beta} g}{2\epsilon_F} \quad (3.62)$$

Setzen wir die Fermienergie ein, so folgt:

$$\frac{\beta g}{2\epsilon_F} = \frac{1}{3} \tilde{\beta} \left(\frac{g}{g_0} \right)^{1/3} \quad (3.63)$$

Die kritische Dichte wird damit

$$\frac{g_{cr}}{g_0} = \left[\frac{4}{\tilde{\beta}} \right]^3 \quad (3.64)$$

Der Phasenübergang ist beendet (d.h. $M_p = 1$) bei

$$\frac{\beta g}{2\epsilon_F} = 4^{1/3} \quad \text{d.h.} \quad \frac{g}{g_0} = 4 \left[\frac{3}{\tilde{\beta}} \right]^3 \quad (3.65)$$

Die Breite des Phasenübergangs ist

$$\frac{g(M=1)}{g_0} - \frac{g_{cr}}{g_0} = \frac{44}{\tilde{\beta}^3} \quad (3.66)$$

Dabei ist

$$\tilde{\beta} = f_0 - f'_0 - g_0 - 3g'_0 \quad (3.67)$$

für den Spin-Isospin-Phasenübergang. Da wir den Spin-Spin und den Isospin-Isospin-Anteil der Selbstenergie vernach-

lässigt haben, ist die effektive Kopplungskonstante

$\tilde{\beta} = f_0 - 3g_0'$. Es sollte jedoch beachtet werden, daß f_0' und g_0 , die im Experiment als positiv bestimmt wurden, der Kondensation entgegenwirken. In den konventionellen Pionenkondensationsrechnungen⁵ werden zwar die kurzreichweitigen Nukleon-Nukleon-Korrelationen aufgrund des zu g_0' proportionalen Terms berücksichtigt, die destruktiven Terme proportional zu f_0' und g_0 werden jedoch nicht berücksichtigt, d.h., die konventionellen Rechnungen sind im Hinblick auf die Pionenkondensation zu optimistisch.

Die selbstkonsistente Gleichung (3.60) für den Ordnungsparameter läßt auf einen Bereich der Kopplungskonstante

$\frac{\beta g}{2\epsilon_F}$ schließen, in dem $M_p = 0$ ist. Vergrößert man die Kopplungskonstante, so steigt M_p von $M_p = 0$ auf $M_p = 1$ an. Es muß jedoch betont werden, daß $M_p = 0$ für alle Werte von $\frac{\beta g}{2\epsilon_F}$ Lösung von (3.60) ist. Welcher Zustand physikalisch realisiert wird, kann nur durch Energiebetrachtungen festgestellt werden.

3.2 Die Kondensationsenergie und die Zustandsgleichung der Kernmaterie

Da die Gleichung (3.60) allein nicht ausreicht, um Aussagen über die wirkliche Existenz des Phasenübergangs zu machen, müssen wir zusätzlich die Energie des Nukleon-

systems berechnen. Sie ist (siehe Anhang A) gegeben durch

$$E = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\frac{\hbar^2}{2m} + \omega + \mu \right) \text{Spur } G(k, \omega) e^{-i\omega 0^-} \quad (3.68)$$

Mit (3.8) und (3.48) folgt daraus

$$E = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\frac{\hbar^2}{2m} + \omega + \mu \right) (g_+(k, \omega) + g_-(k, \omega)) e^{-i\omega 0^-} \quad (3.69)$$

und mit (3.50)

$$E = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{2m} (g_+(k) + g_-(k)) - i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} (\omega + \mu) (g_+(k, \omega) + g_-(k, \omega)) \quad (3.70)$$

Das zweite Integral läßt sich mit Hilfe des Residuensatzes ausführen

$$\mathcal{I}_2 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \omega_+ g_+(k) + \omega_- g_-(k) \right\} \quad (3.71)$$

wobei $\omega_{\pm}$ durch (3.46) gegeben sind. Setzen wir $\omega_{\pm}$ explizit ein und beachten (3.52) und (3.53), so folgt für die Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E &= 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{2m} (g_+(k) + g_-(k)) \\ &+ \frac{1}{2} \alpha \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (g_+(p) + g_-(p)) (g_+(k) + g_-(k)) \\ &- \frac{1}{2} \beta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (g_+(p) - g_-(p)) (g_+(k) - g_-(k)) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Wegen (3.51) können wir nun die k-Integrationen ausführen

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{10m\pi^2} \left[(\hbar_F^+)^5 + (\hbar_F^-)^5 \right] + \frac{2\alpha}{9(2\pi)^4} \left[(\hbar_F^+)^6 + 2(\hbar_F^+ \hbar_F^-)^3 + (\hbar_F^-)^6 \right] \\ &- \frac{2\beta}{9(2\pi)^4} \left[(\hbar_F^+)^6 - 2(\hbar_F^+ \hbar_F^-)^3 + (\hbar_F^-)^6 \right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

Mit Hilfe von (3.58) und (3.59) können wir die Fermimpulse als Funktionen der Magnetisierung schreiben:

$$k_F^\pm = (2m\epsilon_F)^{1/2} (1 \pm M_p)^{1/3} \quad (3.74)$$

Weiterhin führen wir die Energie pro Teilchen in Einheiten der Fermienergie ein:

$$\epsilon = \frac{E}{\epsilon_F N} \quad (3.75)$$

Wir erhalten dann aus (3.73) als:

$$\epsilon = \frac{3}{10} [(1+M_p)^{5/3} + (1-M_p)^{5/3}] + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha g}{2\epsilon_F} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\beta g}{2\epsilon_F} \right) M_p^2 \quad (3.76)$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck für die Energie des Systems als Funktion der Magnetisierung M_p . Für $M_p = 0$ geht (3.76) über in:

$$\epsilon(M_p=0) = \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha g}{2\epsilon_F} \right) \quad (3.77)$$

Der erste Term ist gerade die Energie pro Teilchen eines freien Fermigas: $E/N = \frac{3}{5} \epsilon_F$. Der zweite Term ist die Wechselwirkungsenergie im normalen Zustand; ihre explizite Dichteabhängigkeit ist (siehe (3.63))

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\alpha g}{2\epsilon_F} \right) = \frac{1}{12} \tilde{\alpha} \left(\frac{g}{g_0} \right)^{1/3} \quad (3.78)$$

wobei $\tilde{\alpha}$ nun eine dimensionslose Kopplungskonstante ist.

Um zu sehen, ob aufgrund der Energie (3.76) wirklich ein Phasenübergang auftritt, entwickeln wir die Klammer in (3.76) für $M_p \ll 1$:

$$\epsilon(M_p \ll 1) = \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha g}{2\epsilon_F} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} - \frac{\beta g}{2\epsilon_F} \right) M_p^2 \quad (3.79)$$

Die Energie des Zustandes mit $M_p = 0$ wird daher niedriger als die des normalen Grundzustandes mit $M_p = 0$, sobald

$$\frac{\beta g}{2\epsilon_F} \geq \frac{4}{3} \quad (3.80)$$

Die Energiebetrachtung liefert uns also die gleiche Phasenübergangsbedingung (3.61) wie die Gleichung für den Ordnungsparameter (3.60). Es findet also in der Tat ein Phasenübergang bei $\frac{\beta g}{2\epsilon_F} = \frac{4}{3}$ statt! Der Phasenübergang ist aber nur dann möglich, wenn

$$\beta > 0 ; \quad \tilde{\beta} > 0 \quad (3.81)$$

Nur dann gewinnt man Energie, wenn man von $M_p = 0$ nach $M_p = 0$ übergeht. Dieser Energiegewinn - die Kondensationsenergie - ist gegeben durch:

$$\epsilon_{\text{cond}} = \epsilon(M_p=0) - \epsilon(M_p \neq 0) > 0 \quad (3.82)$$

d.h., explizit

$$\epsilon_{\text{cond}} = \frac{3}{5} - \frac{3}{10} [(1+M_p)^{5/3} + (1-M_p)^{5/3}] + \frac{1}{4} \frac{\beta g}{2\epsilon_F} M_p^2 \quad (3.83)$$

Mit Hilfe der Gl. (3.60) kann man die Kopplungskonstante eliminieren und (3.82) als reine Funktion von M_p schreiben:

$$\epsilon_{\text{cond}} = \frac{3}{5} - \frac{3}{10} [(1+M_p)^{5/3} + (1-M_p)^{5/3}] + \frac{1}{4} M_p [(1+M_p)^{2/3} - (1-M_p)^{2/3}] \quad (3.84)$$

Der maximale Energiegewinn wird für $M_p = 1$ erreicht.

Dafür wird ϵ_{cond} konstant:

$$\epsilon_{\text{cond}}(M_p=1) = \frac{3}{5} - \frac{7}{20} 2^{2/3} \sim 0.0444 \quad (3.85)$$

d.h., der Energiegewinn pro Teilchen beträgt etwa 4 % der (dichteabhängigen) Fermienergie.

Die Kondensationsenergie (3.83) stellt den Energiegewinn dar, wenn man vom normalen, nichtkondensierten Grundzustand der Kernmaterie in den spin-isospinkondensierten Pionenkondensatzustand übergeht. Dieser Phasenübergang macht sich in der Zustandsgleichung der Kernmaterie bemerkbar: ist die Energie pro Nukleon in der normalen Phase gegeben durch²⁹

$$\frac{E}{N} = \frac{K}{18\pi\varrho_0} (\varrho - \varrho_0)^2 + B_0 \quad (3.86)$$

so ist sie unter Berücksichtigung der Kondensationsenergie

$$\frac{E}{N} (M_\rho \neq 0) = \frac{K}{18\pi\varrho_0} (\varrho - \varrho_0)^2 + B_0 + \epsilon_{\text{cond}} \epsilon_F \quad (3.87)$$

Dabei ist K die nukleare Kompressionskonstante $100 \text{ MeV} \leq K \leq 300 \text{ MeV}$ und $B_0 = -16 \text{ MeV}$ die Bindungsenergie des Grundzustandes der Kernmaterie bei $\varrho = \varrho_0$. Um nun den tatsächlichen Einfluß der Kondensation auf die Kernmaterie untersuchen zu können, müssen wir zunächst den realistischen Wert für die Kopplungskonstante β bzw. $\tilde{\beta}$ bestimmen:

3.3 Zur Größe der Kopplungskonstanten

Die für den Phasenübergang wesentliche effektive Kopplungskonstante ist β bzw. in dimensionsloser Form

$$\tilde{\beta} = f_0 - f'_0 - g_0 - 3g'_0 \quad (3.88)$$

bzw. ohne die Spin-Spin und Isospin-Isospin-Wechselwirkung

$$\tilde{\beta} = f_0 - 3g'_0 \quad (3.89)$$

Die aus dem Vergleich des Migdal-Modells mit den experimentellen Daten bekannten Werte in normalen Kernen sind $f_0 = 1 \pm 0.2$ und $g'_0 = 0.7 \pm 0.2$, d.h., in normaler Kernmaterie ist $\tilde{\beta} \approx -1.1 < 0$. Wir haben aber festgestellt, daß nur dann ein Spin-Isospin-Phasenübergang auftritt, wenn $\tilde{\beta} > 0$ ist, d.h., in normalen Kernen gibt es keine Pionen-kondensierte Phase!

Wie bereits zu Anfang betont, enthält jedoch die Wechselwirkung (2.23) nur den Hard-core, d.h., den $k = 0$ Anteil der Wechselwirkung korrekt. Der langreichweitige, durch Ein-Pion-Austausch vermittelte Anteil ist nicht enthalten. Da die π -N-Wechselwirkung von der Form $\sim \sigma_i \tau_i$ ist, beeinflußt der Ein-Pion-Austausch nur den Term $(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j)(\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j)$ in der effektiven Wechselwirkung, d.h., er ändert die Kopplungskonstante g'_0 ab. Da das Pion als p-Welle ausgetauscht wird, wird g'_0 k-abhängig. Diese k-Abhängigkeit wurde von Migdal⁶ angegeben:

$$(g'_0)_k = g'_0 - \frac{f^2 k^2}{1 + k^2 + \pi'(k, 0)} \quad (3.90)$$

Dabei wurde bereits angenommen, daß die Frequenz ω des Kondensates, wie aus den konventionellen Rechnungen bekannt

ist, gegen Null geht. In (3.90) ist $f^2 \sim 1.018$ die π -N-Kopplungskonstante, k der Impuls des Pions und $\Pi'(k, 0)$ der Polarisationsoperator⁶

$$\Pi'(k, \omega) = \Pi(k, \omega) - \Pi_p(k, \omega) = \Pi_R(k, \omega) + \Pi_s(k, \omega) \quad (3.91)$$

Hierin ist $\Pi(k, \omega)$ der volle Polarisationsoperator, der alle Einflüsse des Mediums auf das Pion enthält. Π_p ist der Pol-Term, der Anregungen vom Teilchen-Loch-Typ entspricht, Π_R ist der mit der Anregung eines Δ -Resonanz-Nukleonloch-Paars verknüpfte Polarisationsoperator und Π_s der s-Wellen-Polarisationsoperator. In einem einfachen Modell⁶ können wir daher $(g_0')_R$ schreiben als:

$$(g_0')_R = g_0' - \frac{f^2 k^2}{1.3 + 0.7 k^2} \quad (3.92)$$

d.h., mit $g_0' = 0.7$ wird für große k $(g_0')_R \approx -0.72$, d.h.,

$(g_0')_R$ hat gerade das umgekehrte Vorzeichen von g_0 aber nahezu den gleichen Zahlenwert. Die Beziehung (3.92) beruht allerdings auf einem übersimplifizierten Modell.

Realistischere Rechnungen auf der Basis eines Reid-soft-core Modells³⁰ zeigen, daß $(g_0')_R$ nicht erst für große k sättigt, sondern ein Minimum bei etwa $k \sim (2 - 3)m_\pi$ von $(g_0')_R \approx -0.6$ hat. Da die Kondensation beim günstigsten Wert von $(g_0')_R$ stattfindet, kondensiert das Pionenkonensat mit einem Impuls von etwa $k \sim 3m_\pi$. Der entsprechende Bereich der

effektiven Kopplungskonstante ist

$$\tilde{\beta} \approx 3 \pm 0.5 \quad (3.93)$$

Die kritischen Dichten liegen nach (3.64) bei

$$1.5 \leq \frac{g_{cr}}{g_0} \leq 4 \quad (3.94)$$

Für den aus dem Reid-soft-core-Modell abgeleiteten Wert ist

$$\frac{g_{cr}}{g_0} \sim 3 \quad (3.95)$$

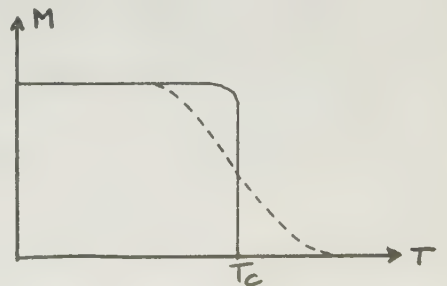
Die Tatsache, daß das Kondensat einen endlichen Impuls von etwa $3m_\pi$ hat, ändert den physikalischen Charakter des Kondensats vollständig: ursprünglich hatten wir eine räumlich homogene Magnetisierung. Da das Kondensat nun aber einen Impuls $k \sim 3m_\pi$ und damit eine räumliche Struktur (Wellenlänge $\lambda = k^{-1}$) hat, ist auch die Spin-Isospin-Magnetisierung räumlich periodisch, d.h., sie stellt eine Spin-Isospinwelle dar. Eine räumlich homogene Magnetisierung entspricht dem Ferromagneten; das Analogon zur Spin-Isospinwelle dagegen ist die Spindichtewelle, d.h., der Antiferromagnet. Die Netto-Magnetisierung bei der Spin-Isospinwelle (integriert über den ganzen Raum) ist daher Null! Das Pionenkondensat als kollektive Anregung der Kernmaterie hat daher zwar einen Einfluß auf die Zustandsgleichung der Kernmaterie, d.h., es macht sich als Änderung der inneren Struktur der Materie bemerkbar, es ist jedoch nicht

direkt mit dem reellen Erscheinen von Pionen verknüpft, da die gesamte Spin-Isospindichte über den Kern integriert verschwindet.

Bei der Untersuchung der realistischen Kopplungskonstante wurden die Effekte der Spin-Spin- und der Isospin-Isospin-Wechselwirkungen nicht berücksichtigt. Schließt man sie auch ein (was in den konventionellen Pionenkondensatrechnungen nicht getan wird), so ist $\tilde{\beta} \approx 2$, d.h., die kritische Dichte verschiebt sich von $g_{cr} \approx 3g_0$ auf $g_{cr} \approx 8g_0$, wenn man für g_0 und f_0' die "experimentellen" Werte²⁰ verwendet. Der Phasenübergang wird also zu hohen Dichten verschoben. Dieser Effekt zeigt, daß die Berücksichtigung der kurzreichweitigen Nukleon-Nukleon-Korrelationen für eine quantitative Aussage über den Phasenübergang von entscheidender Bedeutung ist.

3.4 Die Temperaturabhängigkeit des Kondensationsphänomens

Wir haben bisher nur die Dichteabhängigkeit der Pionenkondensation untersucht. Da im Schwerionenstoß neben der Dichte ϱ auch die Temperatur T eine entscheidende Rolle spielt, liegt es nahe, die Temperaturabhängigkeit zu untersuchen: es ist aus der Theorie des Ferromagneten bekannt, daß die Magnetisierung oberhalb der Curietemperatur T_C verschwindet³¹, d.h., die im



Kondensat gebrochene Rotationssymmetrie wird wiederhergestellt. Da das Pion negative Parität hat und das Pionenkondensat die Quantenzahlen des Pions trägt, kann man erwarten, daß oberhalb einer bestimmten Temperatur die im Kondensat verletzte Paritätssymmetrie wieder hergestellt wird.

Solche Untersuchungen wurden im Rahmen des konventionellen Pionenkondensatmodells von V. Ruck, M. Gyulassy und W. Greiner durchgeführt^{7,8,9}. Diese Rechnungen ergaben, daß das Pionenkondensat die im relativistischen Schwerionestoß vorkommenden Temperaturen¹ von ca. 50 - 80 MeV durchaus überleben kann.

Es liegt nun nahe, den in dieser Arbeit entwickelten Formalismus auf $T \neq 0$ auszuweiten, um z.B. zu untersuchen, wie breit das Übergangsgebiet in T ist usw.

Diese Ausweitung ist im Rahmen des Propagatorformalismus recht einfach (siehe Anhang B)³¹:

man geht zu imaginären Zeiten $\tau = it$ über und definiert die Temperatur-Greensfunktion als (T_τ ist der Zeitordnungsoperator bezüglich τ)

$$G(k, \tau_2 - \tau_1) = -\langle \phi_0 | T_\tau \{ c_k(\tau_2) c_k^\dagger(\tau_1) | \phi_0 \rangle \quad (3.96)$$

Definiert man $\tau = \frac{1}{T}$, so sieht man, daß G im Intervall von $-1/T$ bis $1/T$ ($\beta = \frac{1}{T}$) periodisch mit der Periode 2β

bezüglich $\tau = \tau_2 - \tau_1$ ist, d.h.

$$g(k, \tau) = -g(k, \tau + \beta) \quad , \quad -\beta < \tau < 0 \quad (3.97)$$

Man kann nun die Fouriertransformierte von g definieren als

$$g(k, \omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} g(k, \tau) \quad (3.98)$$

$g(k, \omega_n)$ ist periodisch von $-\infty$ bis $+\infty$ mit den diskreten Frequenzen für Fermionen:

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

d.h.,

$$g(k, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} g(k, \omega_n) \quad (3.99)$$

Der Temperatur-Greensfunktionsformalismus hat den Vorteil, daß wir alle Relationen zwischen g und den physikalischen Observablen unverändert übernehmen können, lediglich die Integration durch eine Summation zu ersetzen haben:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \longrightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \quad (3.100)$$

Weiterhin ändern sich die Feynmanregeln¹². Allerdings wird durch diese Änderungen die formale Struktur der Endresultate nicht beeinflußt.

Die Dysongleichung (3.34) gilt unverändert:

$$g(k, \omega_n) = [g_0^{-1}(k, \omega_n) - \Sigma(k, \omega_n)]^{-1} \quad (3.101)$$

wobei die freie Greensfunktion nun durch

$$g_0(k, \omega_n) = [i\omega_n - \epsilon_k + \mu]^{-1} \quad (3.102)$$

gegeben ist. Mit dem Ansatz für g :

$$g(k, \omega_n) = \frac{1}{4} \left[g(k, \omega_n) + \vec{\sigma} \cdot \vec{S}(k, \omega_n) + \vec{\tau} \cdot \vec{T}(k, \omega_n) + (\vec{\tau} \cdot \vec{T}(k, \omega_n))(\vec{\sigma} \cdot \vec{S}(k, \omega_n)) \right] \quad (3.103)$$

können wir nun völlig analog zu Abschnitt 3.1 die Hartree-Fock-Selbstenergie berechnen. Die zu (3.16) bis (3.19) analogen Ausdrücke sind nun ($t = 0^+$)

$$g(k) = -\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k, \omega_n) e^{i\omega_n 0^+} \quad (3.104)$$

$$\Sigma_i(k) = -\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_i(k, \omega_n) e^{i\omega_n 0^+} \quad (3.105)$$

$$t_i(k) = -\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_i(k, \omega_n) e^{i\omega_n 0^+} \quad (3.106)$$

$$p_{ik}(k) = -\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_i(k, \omega_n) S_k(k, \omega_n) e^{i\omega_n 0^+} \quad (3.107)$$

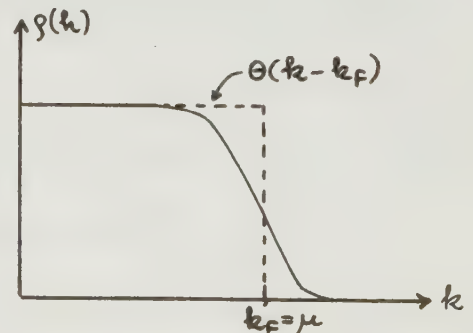
(3.25) usw. bleibt ungeändert. Damit läßt sich die Hartree-Fock-Selbstenergie berechnen: man erhält unverändert das Resultat (3.33). Die wesentliche Änderung liegt in $g(k)$: im Gegensatz zu (3.51) ist $g(k)$ keine Stufenfunktion

$g(k) = \Theta(k - k_F)$ mehr, sondern

$$g(k) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1} \quad (3.108)$$

d.h., die für $T = 0$ scharfe Fermikante ist nun thermisch ausgeschmiert. Die Dysongleichung

(3.101) läßt sich nun völlig analog zur für $T = 0$ beschriebenen Methode lösen: Anstelle von (3.52) und (3.53) erhalten wir



$$g = 2 \int_0^{\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{e^{\beta(\omega_+ - \mu)} + 1} + \frac{1}{e^{\beta(\omega_- - \mu)} + 1} \right] \quad (3.109)$$

$$p = 2 \int_0^{\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{e^{\beta(\omega_+ - \mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega_- - \mu)} + 1} \right] \quad (3.110)$$

wobei $\omega_{\pm} = \frac{k^2}{2m} + \frac{1}{4}\alpha\varphi + \frac{1}{4}\beta\rho$ wie im Fall für $T = 0$ ist.

Die einzige Änderung gegenüber $T = 0$ besteht darin, daß anstelle der Θ -Funktionen $\vartheta_{\pm}(k)$ nun die Fermifunktionen in (3.109) und (3.110) vorkommen. Dadurch lassen sich die Integrationen über k jedoch nicht mehr analytisch ausführen. Für Temperaturen, die nicht größer sind als die Fermienergie, läßt sich jedoch der Integrand entwickeln³²; dazu schreiben wir zunächst

$$\vartheta = 2(\mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-) \quad ; \quad \rho = 2(\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_-) \quad (3.111)$$

wobei
$$\mathcal{F}_{\pm} = \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{e^{\frac{1}{T}(\epsilon - \mu_{\pm})} + 1} \quad (3.112)$$

Dabei ist
$$\mu_{\pm} = \mu - \frac{1}{4}\alpha\varphi \pm \frac{1}{4}\beta\rho \quad (3.113)$$

Nach einigen Variablentransformationen und für kleine Temperaturen, erhält man³²:

$$\mathcal{F}_{\pm} \approx \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi)^2} \left[\frac{2}{3}\mu_{\pm}^{3/2} + \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{\sqrt{\mu_{\pm}}} T^2 + \frac{7\pi^4}{960} (\mu_{\pm})^{-5/2} T^4 + \dots \right] \quad (3.114)$$

Der erste, temperaturabhängige Term liefert das Resultat (3.54) und (3.55). Aus den Untersuchungen zu relativistischen Schwerionenstößen ist bekannt, daß es bis zu Temperaturen von etwa 50 MeV ausreicht den T^2 -Term mitzunehmen. Drücken wir nun noch $\mu_{\pm}$ und T in Einheiten der Fermienergie aus, dh.,

$$\tilde{\mu}_{\pm} = \frac{\mu_{\pm}}{\epsilon_F} \quad ; \quad \tilde{T} = \frac{T}{\epsilon_F} \quad (3.115)$$

so erhalten wir die Gleichungen:

$$1 + M_p = \frac{1}{\tilde{\mu}_+^{1/2}} \left[\tilde{\mu}_+^2 + \frac{\pi^2}{8} \tilde{T}^2 \right] \quad (3.116)$$

$$1 - M_p = \frac{1}{\tilde{\mu}_-^{1/2}} \left[\tilde{\mu}_-^2 + \frac{\pi^2}{8} \tilde{T}^2 \right] \quad (3.117)$$

wobei
$$\tilde{\mu}_{\pm} = \frac{\mu}{\epsilon_F} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha \vartheta}{2 \epsilon_F} \right) \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\beta \vartheta}{2 \epsilon_F} \right) M_P \quad (3.118)$$

ist. Die beiden Gleichungen (3.116) und (3.117) entsprechen der selbstkonsistenten Gleichung (3.60) für $T = 0$. Bei $T \neq 0$ kann man die beiden Gleichungen als biquadratische Gleichungen in $x_{\pm} = \tilde{\mu}_{\pm}^{1/2}$ auffassen, nach $x_{\pm}$ auflösen und durch Addition wiederum μ eliminieren. Daraus erhält man die Phasengrenzkurven für $T \neq 0$ und $T \ll \epsilon_F$. Man kann auch höhere Terme in T aus (3.114) mitnehmen und erhält analoge Gleichungen zu (3.116) und (3.117). Da wir den Fall $T \ll \epsilon_F$ untersucht haben (d.h. den unteren Limes), können wir auch den Grenzfall hoher Temperaturen $T \gg \epsilon_F$ untersuchen. In diesem Fall lassen sich die Integrale (3.112) wiederum entwickeln und man erhält: ($\mu_{\pm} = \tilde{\mu}_{\pm} \epsilon_F$)

$$\mathcal{F}_{\pm} = \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi)^2} T^{3/2} e^{\frac{\mu_{\pm}}{T}} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-x} x^{1/2} [1 - e^{\frac{\mu_{\pm}}{T} - x}] dx \right\} \quad (3.119)$$

bzw. nach der Integration

$$\mathcal{F}_{\pm} = \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi)^2} T^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left[e^{\frac{\mu_{\pm}}{T}} - \frac{1}{4} \sqrt{2} e^{\frac{2\mu_{\pm}}{T}} \right] \quad (3.120)$$

Der erste Term in der Klammer entspricht dem idealen Boltzmann-Gas; der zweite Term ist die Korrektur dazu, die wir im weiteren weglassen (in diesem Bereich $T \gg \epsilon_F$ ist μ negativ, d.h., $\exp\{\mu_{\pm}/T\} \ll 1$). Mit (3.120) können wir nun (3.109) und (3.110) auflösen und erhalten eine Gleichung für den Ordnungsparameter

$$\frac{\beta \vartheta}{2T} = \frac{1}{M_P} [\ln(1+M_P) - \ln(1-M_P)] \quad (3.121)$$

Um die kritische Dichte zu bestimmen, entwickeln wir für $M_p \ll 1$, setzen β ein und erhalten

$$\frac{g_{cr}}{\rho_0} = \frac{6T}{\tilde{\beta} \epsilon_F^0} \quad (3.122)$$

wobei $\epsilon_F^0 = 39 \text{ MeV}$ die Fermienergie bei $\rho = \rho_0$ ist. Wir haben damit sowohl eine untere als auch eine obere Grenze für die Phasenübergangskurve abgeleitet.

3.5 Diskussion der Resultate

Wir sind nun in der Lage, sowohl die Dichte- als auch die Temperaturabhängigkeit der Kondensation zu diskutieren. Zunächst betrachten wir jedoch die Resultate für $T = 0$.

Fig 1. zeigt die Dichteabhängigkeit der Spin-Isospin-Polarisierung M_p als Funktion der Dichte ρ/ρ_0 für verschiedene

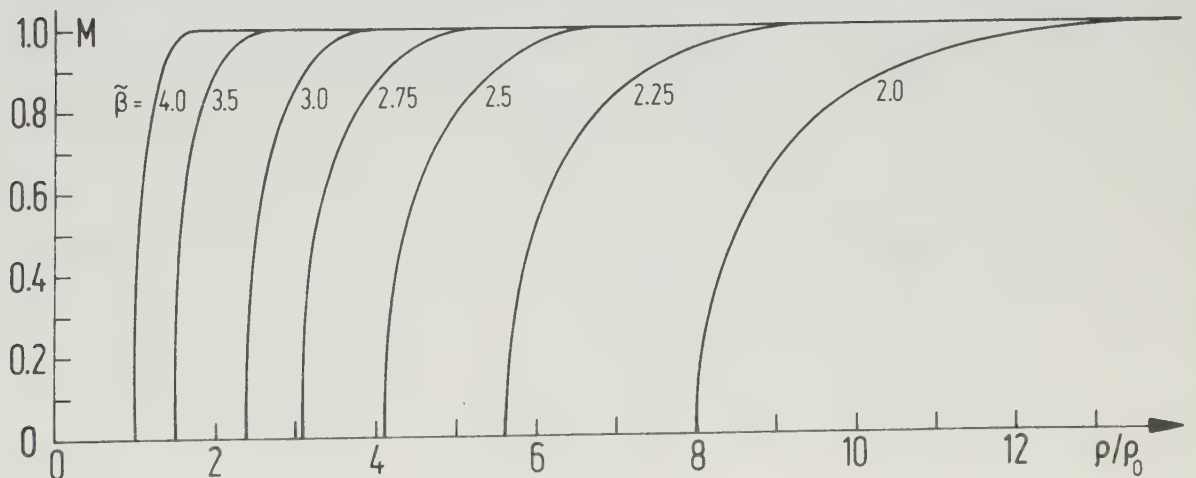


Fig. 1: zeigt die Spin-Isospin-Polarisierung (d.h. die Stärke des Pionenkondensats als Funktion der Kerndichte für verschiedene Werte von $\tilde{\beta} = f_0 - 3g'_0$.

Werte von $\tilde{\beta}$. Der physikalisch relevante Wertebereich ist $2.5 \leq \tilde{\beta} \leq 3.5$, d.h., der Spin-Isospin-Phasenübergang setzt zwischen $1.5 \leq \rho/\rho_0 \leq 4$ ein. Die wirkliche kritische Dichte hängt sehr sensitiv von $\tilde{\beta}$ ab: für den "vernünftigsten" Wert $\tilde{\beta} \sim 3$ aus den Reid-Soft-core-Rechnungen³⁰ ist

$\rho_{cr}/\rho_0 \sim 2.3$. Weiterhin fällt auf, daß die Breite des Phasenübergangs $\Delta\rho = (\rho(M=1) - \rho_{cr})/\rho_0$ mit abnehmendem $\tilde{\beta}$ sehr stark anwächst. Fig. 2 zeigt die Breite des Phasenübergangs als Funktion von $\tilde{\beta}$: bei $\tilde{\beta} \sim 3$ ist $\Delta\rho \sim \rho_0$, d.h.,

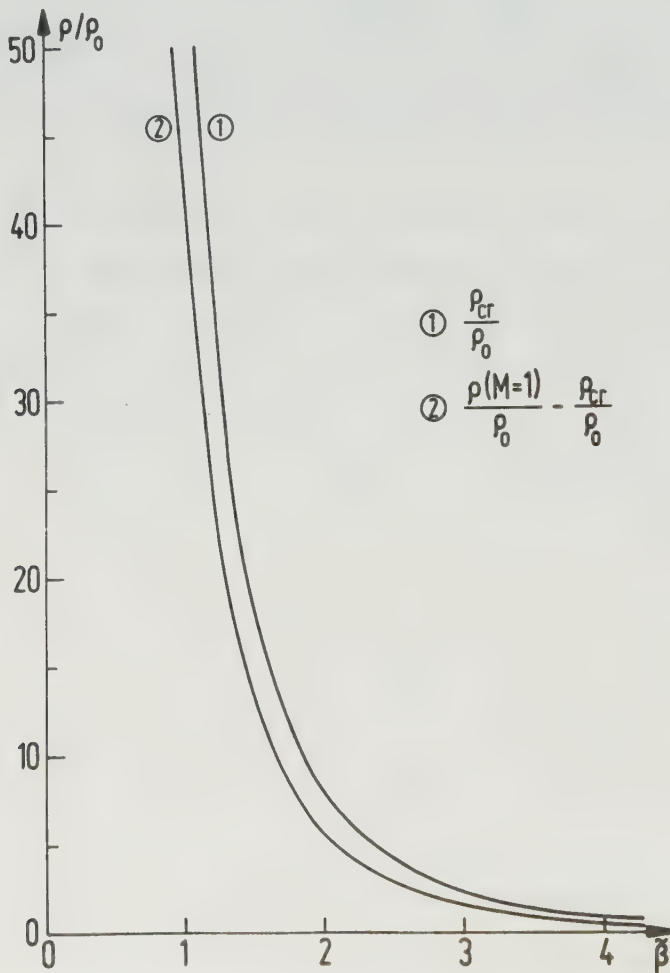


Fig. 2: Die Abhängigkeit der kritischen Dichte ρ_{cr} ① und der Breite des Phasenübergangs $\Delta\rho$ ② von $\tilde{\beta}$ ist dargestellt.

der Phasenübergang ist nach Kompression von $2.3 \varrho_0$ auf $3.3 \varrho_0$ beendet ($M_p = 1$). Im Bereich zwischen $1 \leq \tilde{\beta} \leq 2$ wächst $\Delta \varrho$ auf mehr als $40 \varrho_0$ an, d.h., der Phasenübergang wird so breit, daß er nicht mehr wahrnehmbar ist. Analog wie $\Delta \varrho$ wächst auch ϱ_{cr} in diesem Bereich schlagartig an, d.h., der Phasenübergang setzt erst bei $40 \varrho_0$ ein und ist zudem $40 \varrho_0$ breit. Glücklicherweise liegt der realistische Wert $\tilde{\beta} \sim 3$ in einem Bereich, in dem sowohl die Breite $\Delta \varrho$ als auch die kritische Dichte so klein sind ($\Delta \varrho \sim \varrho_0$; $\varrho_{cr} \sim 2 \varrho_0$), daß man Hoffnung haben kann, einen solchen Phasenübergang im Schwerionenstoß zu sehen. Ob dies jedoch der Fall ist, hängt weiterhin ganz wesentlich vom Verhalten der Kondensationsenergie pro Teilchen als Funktion der Dichte ab. In Fig. 3 ist zunächst die Kondensationsenergie pro Teilchen in Einheiten der Fermienergie als Funktion der Spin-Iso-spin-Polarisierung M_p dargestellt. Dabei wurde die Abhängigkeit von der Kopplungskonstante nach (3.84) eliminiert. Wie man sieht, wächst die Kondensationsenergie nur sehr schwach an bis etwa $M_p \sim 0.7$, steigt dann bis zu $M_p = 1$ auf den vierfachen Wert. Der maximal erreichbare Wert der Kondensationsenergie ist etwa 4,5 %

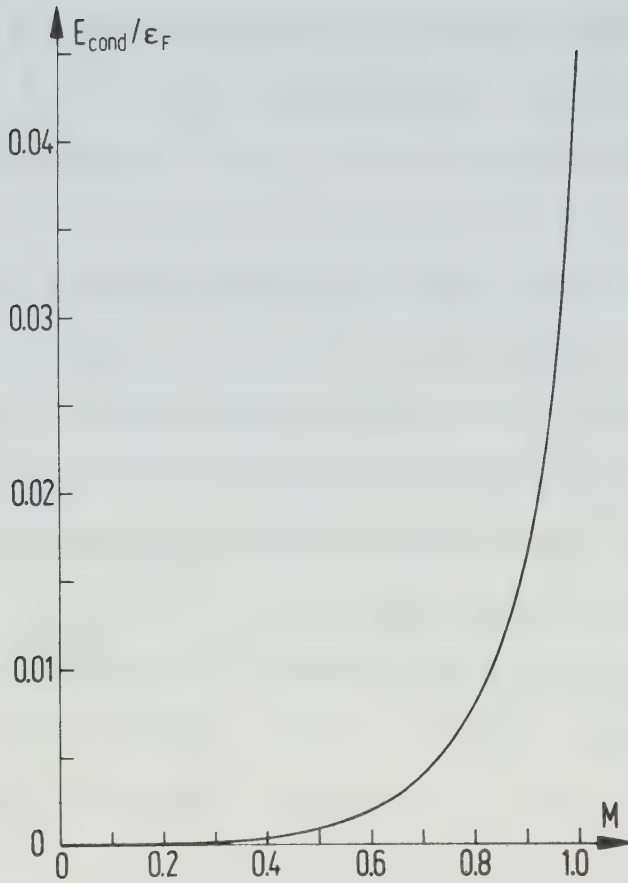


Fig. 3: Die Kondensationsenergie $E_{\text{cond}}/\epsilon_F$ in Einheiten der Fermienergie ϵ_F ist parameterfrei und nur eine Funktion der Magnetisierung.

der dichteabhängigen Fermienergie. In Fig. 4 ist die Kondensationsenergie als Funktion der Dichte ϱ/ϱ_0 dargestellt. Da die Fermienergie ϵ_F dichteabhängig ist, steigt E_{cond} auch dann noch an, wenn $M_p = 1$ ist. Für den realistischen Wert von $\tilde{\beta} \sim 3$ mit der kritischen Dichte $\varrho_{\text{cr}}/\varrho_0 \sim 2.3$ beträgt die Kondensationsenergie pro Teilchen bei $\varrho \sim 6\varrho_0$ erst etwa 10 MeV. Es kommt daher sehr auf das Verhalten der Zustandsgleichung der normalen Materie an, ob

die Kondensationsenergie darauf noch einen Einfluß haben

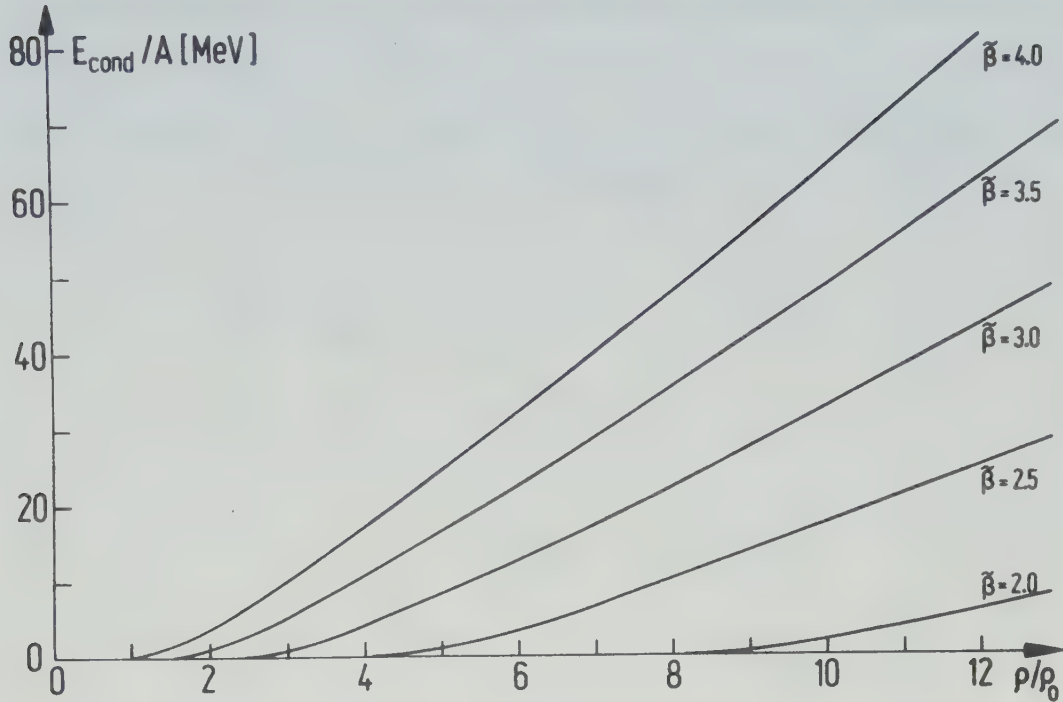


Fig. 4: zeigt die Kondensationsenergie E_{cond} pro Teilchen in MeV für verschiedene Werte von $\tilde{\beta}$.

kann. Wir verwenden den Ansatz (3.87) mit der Kompressionskonstante K und berücksichtigen den Einfluß der Kondensation. Damit erhalten wir eine neue nukleare Zustandsgleichung.

In Fig. 5 ist die Zustandsgleichung der Kernmaterie mit $K = 100$ MeV und $\tilde{\beta} = 3$ bzw. $\tilde{\beta} = 3.5$ dargestellt. Die

Kondensationsenergie reicht für diese Werte von $\tilde{\beta}$ nur

aus, um ein Abbiegen bei hohen Dichten ($\rho \sim 5\rho_0$) bzw. einen

Wendepunkt zu erzeugen. Man kann also ein van der Waals-

artiges Verhalten mit einem Minimum im Druck $p = \rho^2 \frac{\partial E/A}{\partial \rho}$

bei $p > 0$ erwarten. Wie stark die effektive Form der modifizierten Zustandsgleichung von der Zustandsgleichung

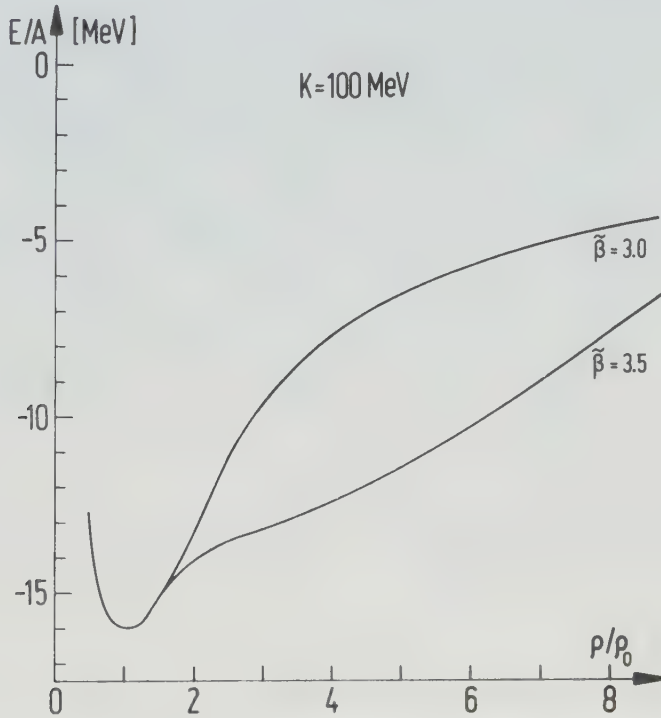


Fig. 5: Die nukleare Zustandsgleichung für $T = 0$ und $K = 100 \text{ MeV}$ zeigt den Einfluß eines Pionen-kondensats mit $\tilde{\beta} = 3$ und $\tilde{\beta} = 3.5$.

der normalen Kernmaterie abhängt, ist in Fig. 6 dargestellt. Hier wurde zum Ansatz (3.87) ein Term der Form

$$\alpha(\varphi - \varphi_0)^2 \text{ addiert. Je nach der Größe von } \alpha \ll \frac{K}{18}$$

erhält man die verschiedenen Kurven für $\tilde{\beta} = 3.5$. Die anderen Kurven für $\tilde{\beta} = 2.5, 3, 3.7, 4$ sind mit $\alpha = 0$ gerechnet. Da in einigen Fällen die Kondensationsenergie stärker als die Energie der normalen Materie ansteigt,

wird die Gesamtzustandsgleichung für große Dichte instabil. Fordert man jedoch die Stabilität bei hohen Dichten, so erhält man für jeden Wert von $\tilde{\beta}$ eine minimale Kompressionskonstante, die die Stabilität garantiert: $K > 58 \tilde{\beta}$, d.h., für $\tilde{\beta} = 3$ muß $K > 174$ MeV sein. Für be-

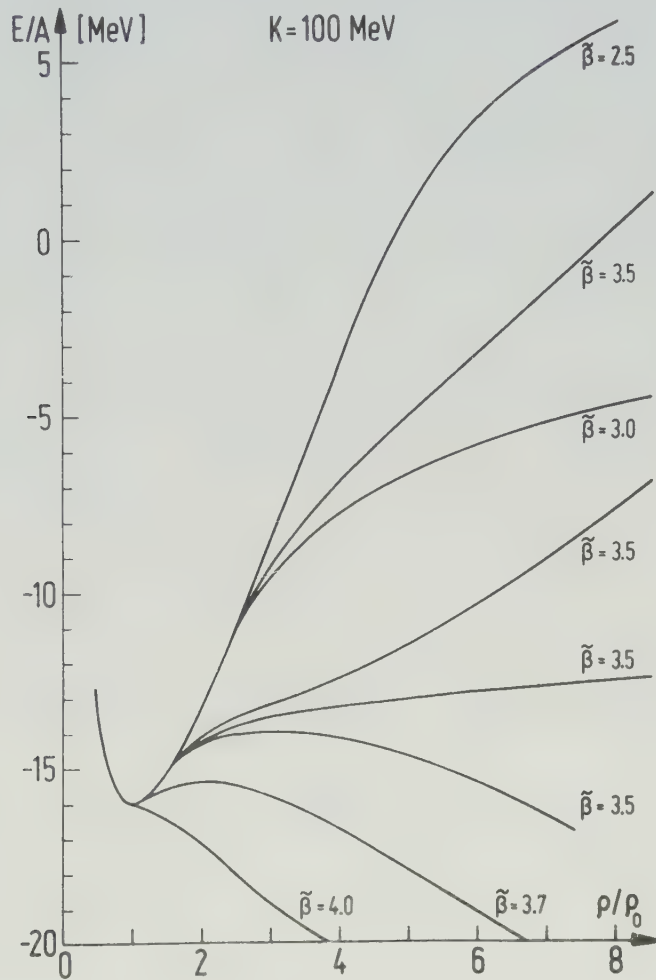


Fig. 6: Die nukleare Zustandsgleichung hängt bei gleichem $\tilde{\beta}$ sehr stark von der Zustandsgleichung der normalen Kernmaterie ab (siehe Text).

stimmte Zustandsgleichungen der normalen Kernmaterie und Werte von $\tilde{\beta}$ erhält man exotische neue Zustandsgleichungen. Ein solcher Fall ist in Fig. 7 dargestellt:

$\tilde{\beta} = 3.7$; hier erhält man ein extrem breites Minimum bei $\varrho \sim 10 \varrho_0$, das vom normalen Grundzustand bei $\varrho = \varrho_0$ nur

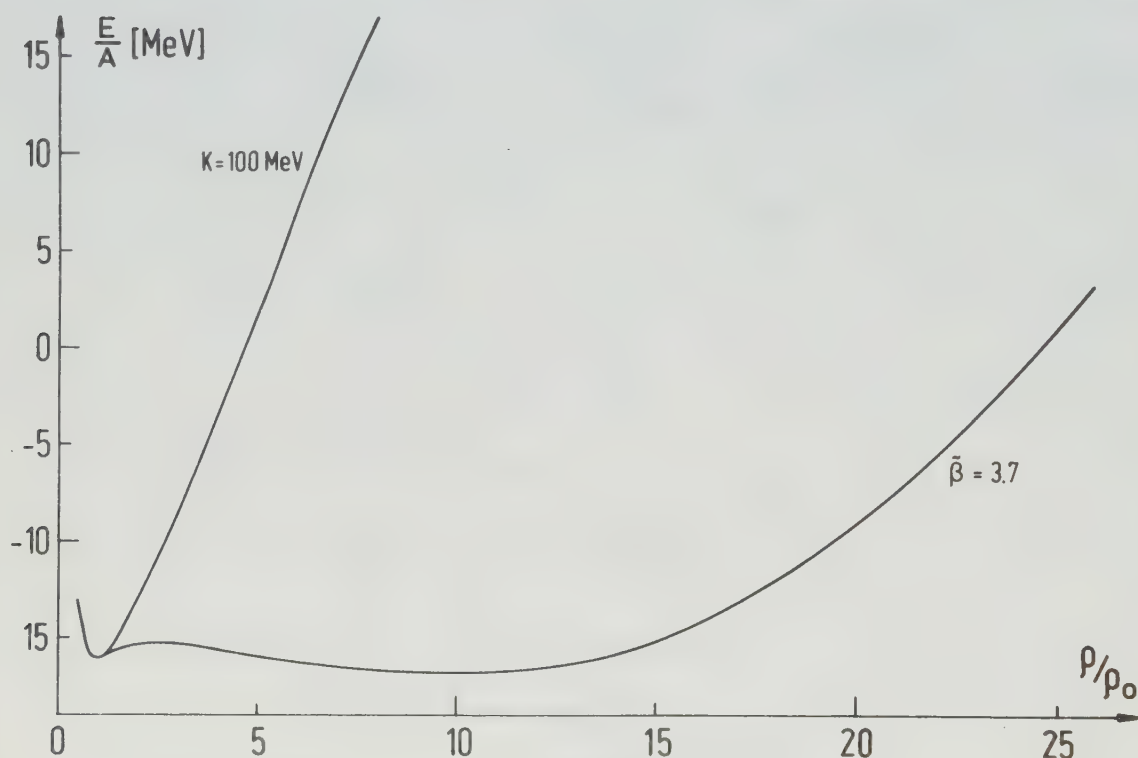


Fig. 7: zeigt die normale Zustandsgleichung der Kernmaterie mit $K = 100$ MeV und eine "exotische" Zustandsgleichung, die aus der normalen durch Einfluß des Pionenkondensats mit $\tilde{\beta} = 3.7$ hervorgeht.

durch eine Barriere von 1 MeV getrennt ist. Ein solches Verhalten scheint jedoch aufgrund der Stabilität der normalen Kernmaterie ausgeschlossen. Die Kondensationsenergie führt nur deshalb nicht zu ausgeprägten Minima, da sie zu langsam

in den relevanten Dichtebereichen ansteigt. Man kann dies kompensieren, wenn man ad hoc eine effektive Nukleonmasse m^* in die Fermienergie einführt. Fig. 8 ist $m^* = 0.5 m$, $\tilde{\beta} = 3$ und $K = 100$ MeV. Hier findet man ein ausgeprägtes

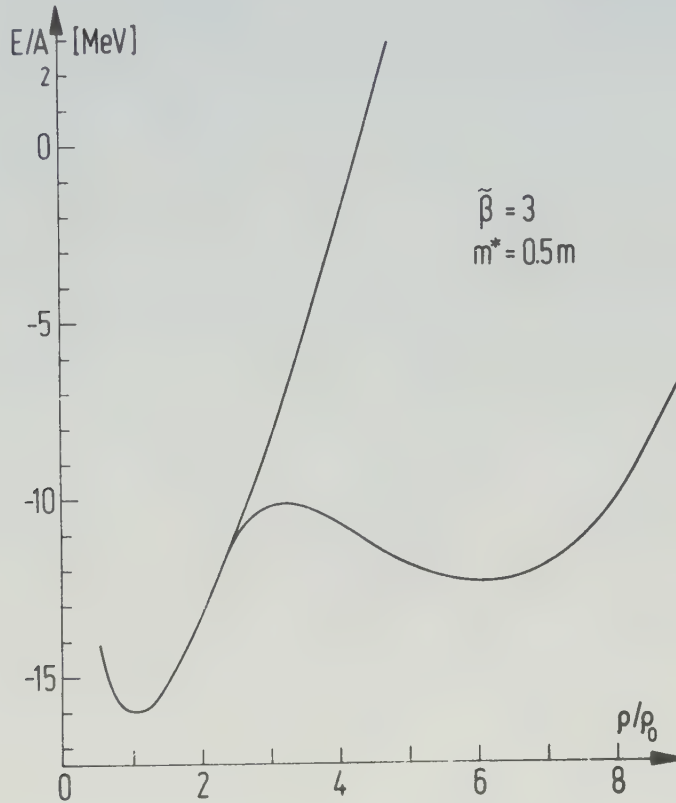
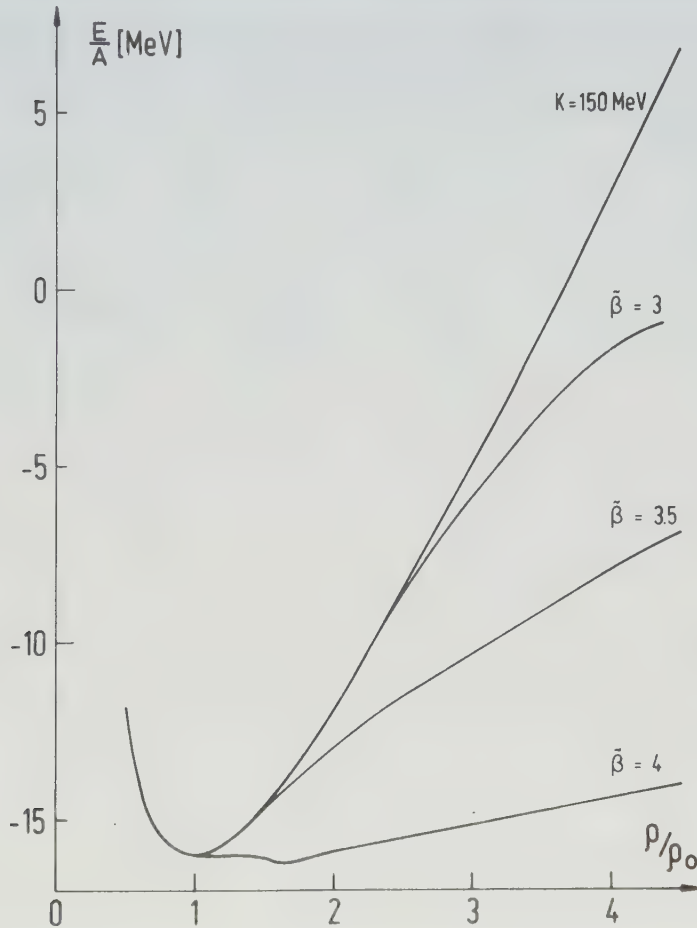


Fig. 8: Der Einfluß der effektiven Nukleonmasse m^* für gegebenes $\tilde{\beta}$ ist dargestellt. Da die Kondensationsenergie dann stärker anwächst, tritt ein ausgeprägtes "Dichteisomer" auf.

2. Minimum bei $\rho \sim 6\rho_0$ und $E/A \sim -13$ MeV. Die Barriere ist etwa 3 MeV hoch. Geht man zu höheren Kompressionskonstanten,

ändert sich das Bild: bei $K = 150$ MeV (Fig. 9): der Einfluß der Kondensationsenergie nimmt weiter ab. Nur bei



sehr hohen Dichten flacht die Zustandsgleichung ab. Bei $K = 200$ MeV (Fig. 10) verstärkt sich dieser Effekt noch: man sieht kaum noch etwas von der Kondensationsenergie! Die Kondensation kann praktisch als abgeänderte Kompressionskonstante interpretiert werden. Das gleiche Bild erhält man, wenn man anstelle (3.87) eine Grundzustandsgleichung der Form

$$\frac{E}{A} = \frac{K}{18} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right)^2 + B \quad (3.123)$$

verwendet, d.h., E/A steigt wesentlich stärker an als (3.87).

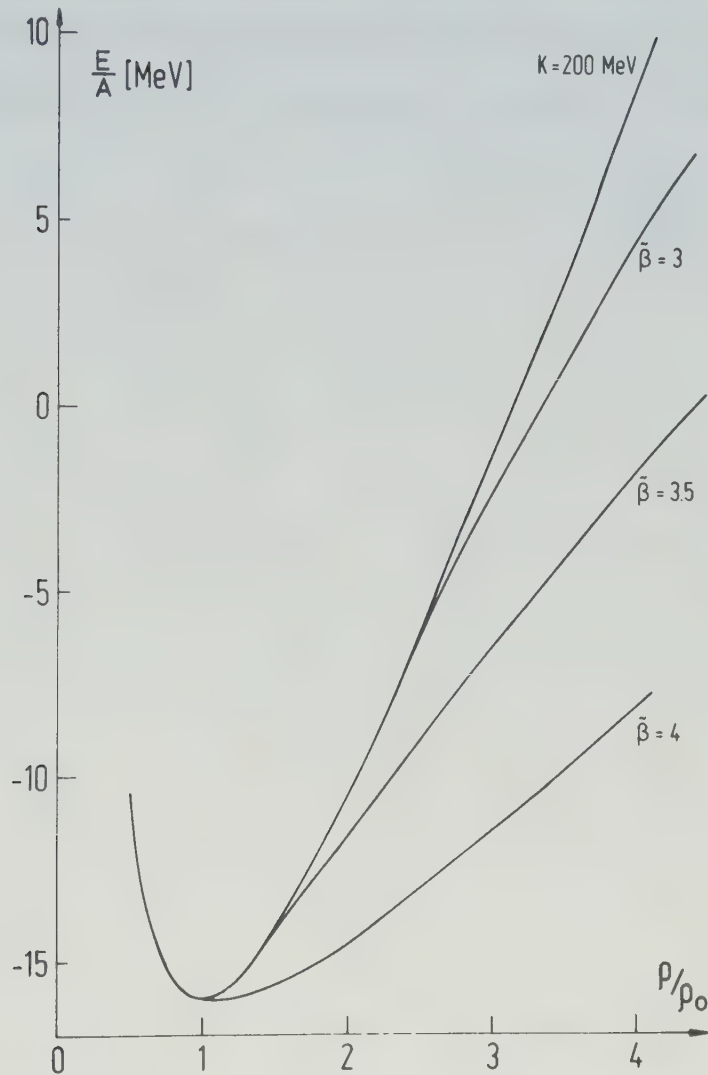
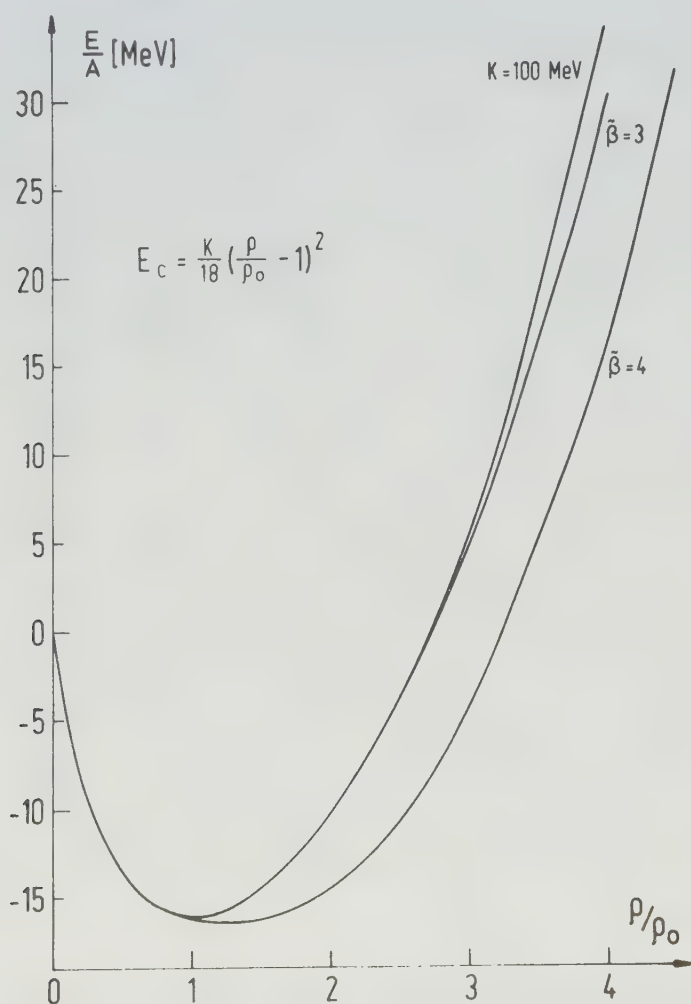


Fig. 9 und 10: Eine Erhöhung der Kompressionskonstante auf $K = 150$ bzw. 200 MeV bringt das Pionenkondensat nahezu zum Verschwinden.

In Fig. 11 und Fig. 12 ist die nukleare Zustandsgleichung dargestellt, die aus (3.123) und der Kondensationsenergie resultiert: bereits bei $K = 100$ MeV (Fig. 11) äußert sich

die Kondensation erst bei extrem hohen Dichten nur noch als leichte Modifikation der effektiven Kompressionskonstante. Bei $K = 200$ MeV ist nichts mehr zu sehen!



Zusammenfassend kann man sagen, daß sich das Kondensationsphänomen nur dann in der nuklearen Zustandsgleichung bemerkbar macht, wenn die Zustandsgleichung der normalen Materie sehr flach verläuft. Nimmt man die übliche Kompressionskonstante $K \sim 200$ MeV, so ist der Einfluß der Kondensation ver-

nachlässigbar gering. Neben dem Einfluß der Kondensation auf die effektive Zustandsgleichung ist die Temperaturabhängigkeit von wesentlicher Bedeutung. Man muß sich fragen, ob ein Kondensat mit typischen Kondensationsenergien von etwa 10 MeV einen relativistischen Schwer-

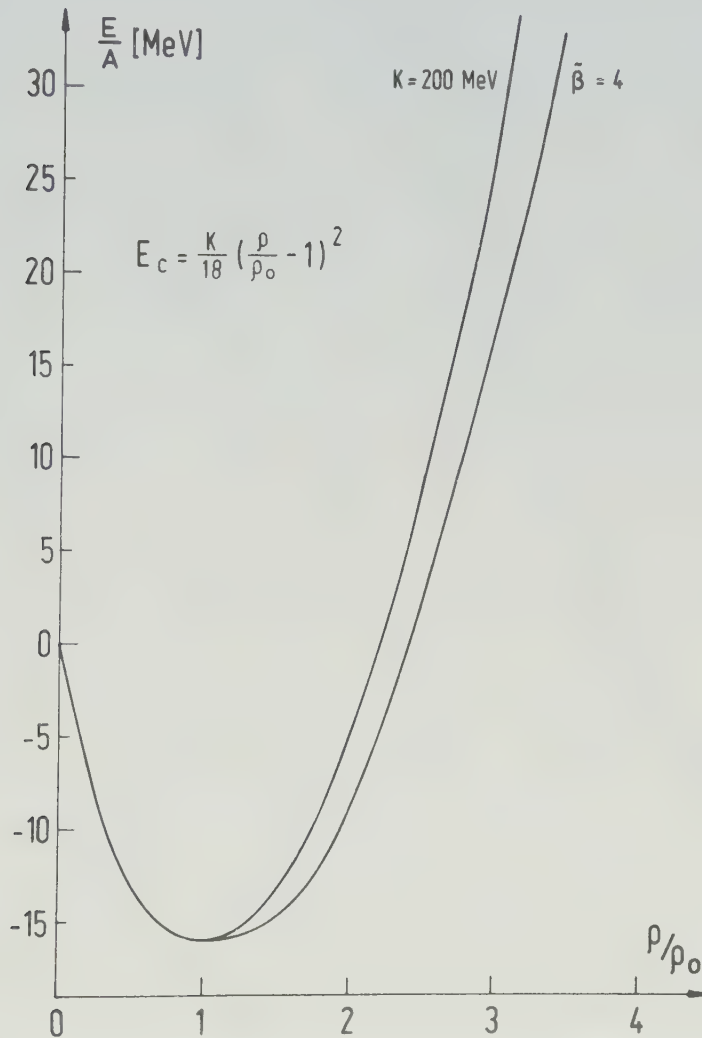


Fig. 11 und 12: Die Zustandsgleichung der normalen Kernmaterie wächst hier für große Dichten quadratisch an. Das Pionenkondensat macht sich hier nur noch als Änderung der effektiven Kompressionskonstante bemerkbar.

ionenstoß mit Temperaturen bis zu 60 MeV überleben kann. Zunächst betrachten wir die Temperaturabhängigkeit der kritischen Dichte $\rho_{cr}/\rho_0(T)$ (Fig. 13): die kritische Dichte

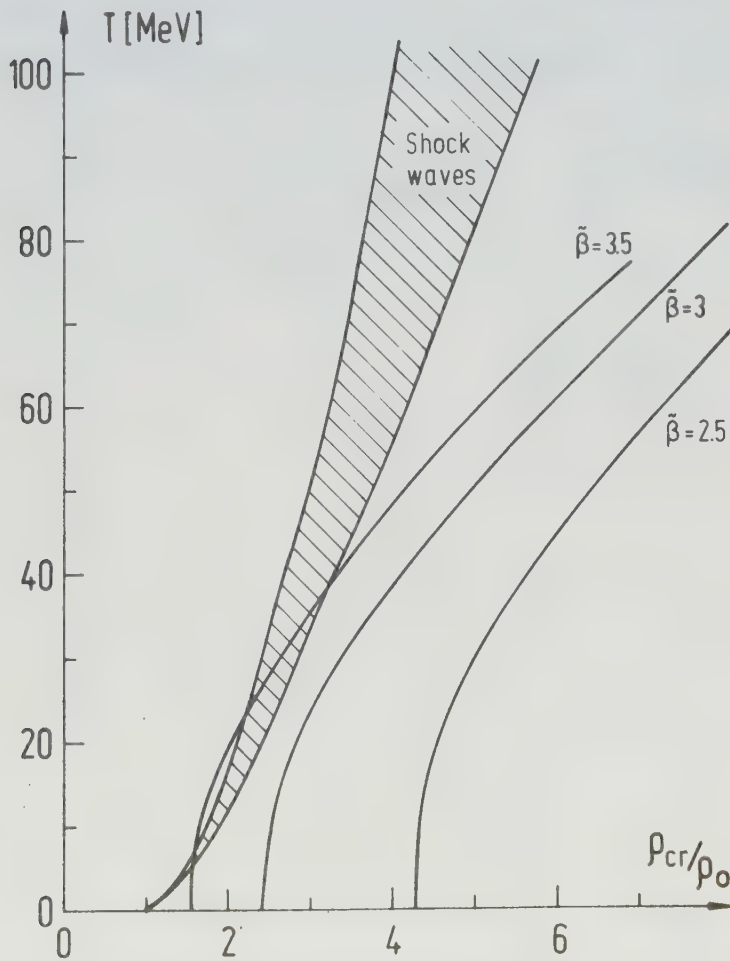


Fig. 13: zeigt die Temperaturabhängigkeit der kritischen Dichte ρ_{cr}/ρ_0 für $T \ll \epsilon_F$. Die in Schockwellen erreichten Temperaturen sind schraffiert dargestellt.

verschiebt sich bei anwachsender Temperatur zu höheren Werten. Die Kondensation setzt bei einer kritischen Temperatur nicht

völlig aus (wie man das vom Ferromagneten erwarten würde), da die Kondensationsenergie nicht konstant ist, sondern mit der Dichte anwächst. In Fig. 14 ist die Temperaturab-

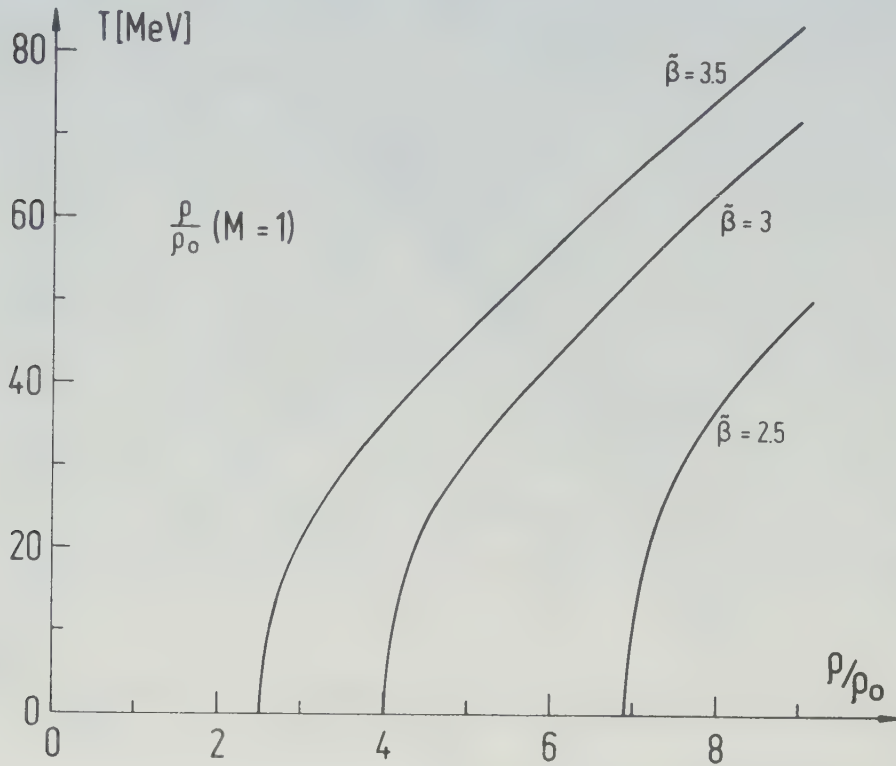


Fig. 14: Die Dichte $\varrho (M = 1)/\varrho_0$, bei der der Phasenübergang vollständig ist, d.h., $M = 1$, ist als Funktion der Temperatur dargestellt ($T \ll \epsilon_F$).

hängigkeit der Dichte dargestellt, bei der $M = 1$ wird: auch sie wächst mit der Temperatur an. Die Breite des Phasenübergangs, d.h. $\Delta\varrho/\varrho_0 = \varrho (M = 1)/\varrho_0 - \varrho_c/\varrho_0$ bleibt jedoch nahezu unverändert. Die Resultate in Fig. 13 und Fig. 14 sind alle im Grenzfall $T \ll \epsilon_F$, d.h., mit dem ersten Term $\sim T^2$ in der Entwicklung des Fermiintegrals (3.112) gerechnet.

Diese Näherung sollte gut sein bis etwa $T \sim 15$ MeV. Für Temperaturen $T \gg \epsilon_F$ können wir (3.122) verwenden. Wir erhalten somit einen Bereich, in dem die wirkliche Lösung von (3.109) und (3.110) verläuft. In Fig. 15 ist dieser

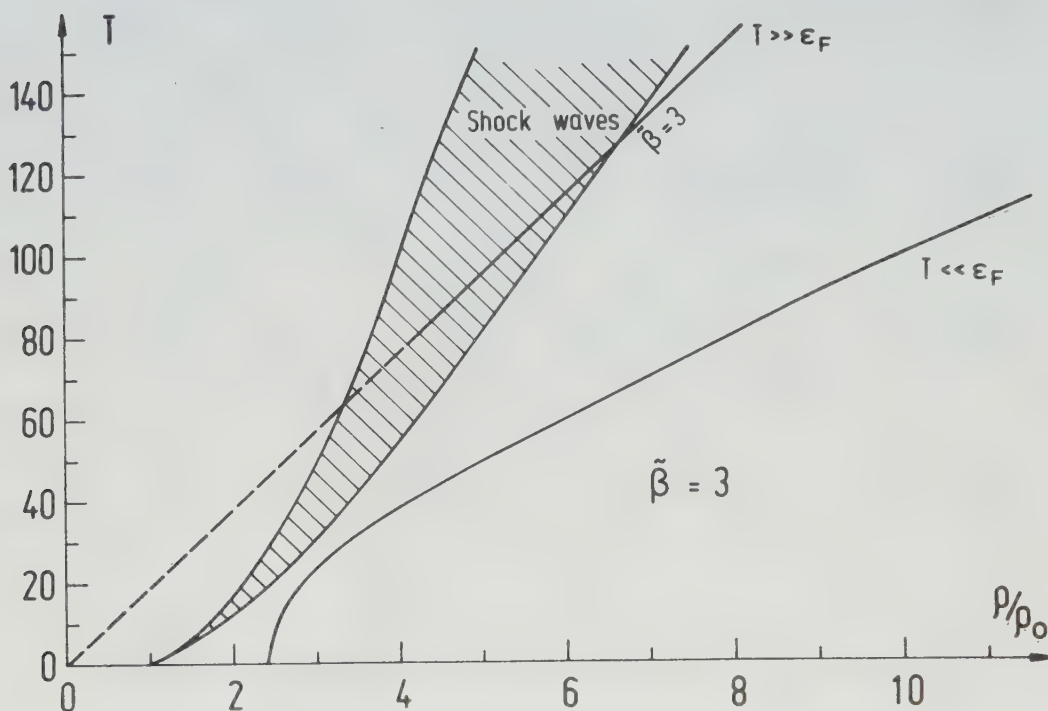


Fig. 15: zeigt die Temperaturabhängigkeit der kritischen Dichte ρ_c/ρ_0 für $\tilde{\beta} = 3$ in den Grenzfällen $T \ll \epsilon_F$ und $T \gg \epsilon_F$.

Bereich der kritischen Dichte für $\tilde{\beta} = 3$ dargestellt! Die in den Schockwellen erreichten Temperaturen¹ liegen immer höher als die Stabilitätsgrenze für $T \ll \epsilon_F$, aber ab Dichten von $\rho \sim 7\rho_0$ auch höher als der Grenzwert für $T \gg \epsilon_F$, d.h., die Stabilität des Kondensats in Schockwellen er-

scheint sehr fraglich! In Fig. 16 ist das gleiche für $\tilde{\beta} = 3.5$ dargestellt: auch hier liegen die Phasengrenz-

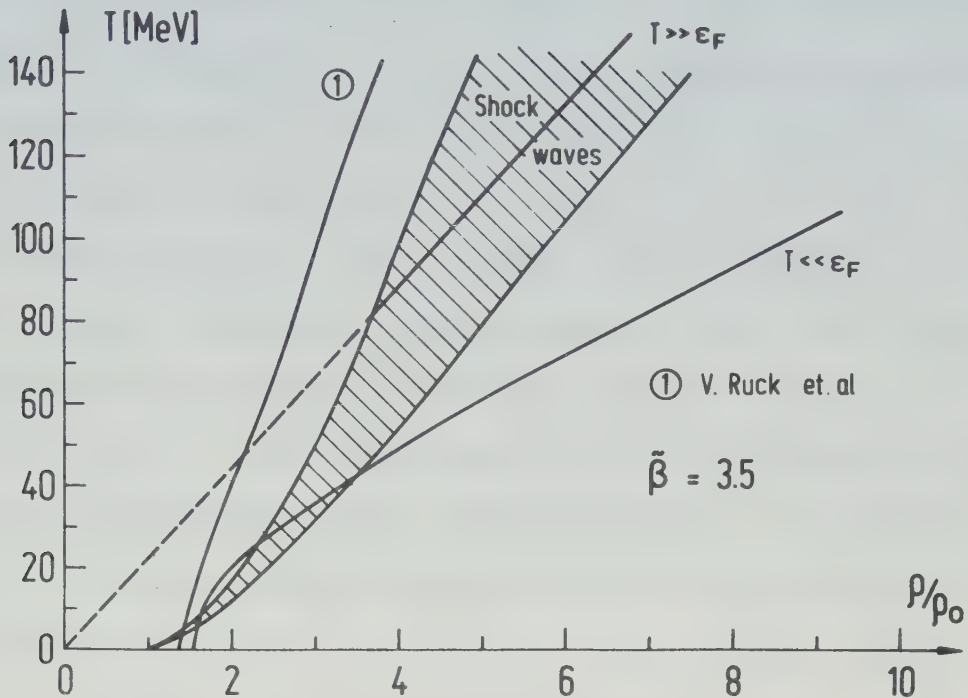


Fig. 16: wie Fig. 15 für $\tilde{\beta} = 3.5$. Die Resultate von V. Ruck et al^{7,8} sind zusätzlich dargestellt.

kurven für $T \ll \epsilon_F$ bzw. $T \gg \epsilon_F$ unter bzw. innerhalb des Schockwellengebietes, d.h., auch hier ist die Stabilität sehr fraglich. Diese Resultate stehen im Gegensatz zu V. Ruck et al^{7,8}, die eine Phasengrenzkurve oberhalb des Schockwellengebietes und damit die Stabilität des Pionenkondensats vorhersagen. In diesen Rechnungen wurde die "konventionelle" Methode des Pionenpropagators in RPA-Näherung verwendet. Die vorliegende Arbeit und andere

Rechnungen von Schütte³³ lassen daher Zweifel an der Gültigkeit der Propagatormethode^{7,8} aufkommen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß der Einfluß des Pionenkondensatphasenübergangs auf die nukleare Zustandsgleichung und damit auf die Dynamik von relativistischen Schwerionenstößen sehr schwach ist. Es erscheint jedoch nicht ausgeschlossen, daß präkritische Streuphänomene⁹ auftreten, die mit dem Phasenübergang verbunden sind: dazu ist ein voll ausgeprägter Phasenübergang nicht nötig. Weiterhin liegen die Phasengrenzkurven (Fig. 15 und Fig. 16) im Bereich der im Schwerionenstoß erreichten Temperaturen, d.h., die Stabilität des Kondensats in Schockwellen ist zweifelhaft. Um Informationen über den wahren Zustand des Nukleonensystems zu gewinnen, sollte man zum Beispiel nach einem irregulären Verhalten der thermischen Eigenschaften der Materie sehen, d.h., etwa nach Sprüngen in den spezifischen Wärmen C_v , C_p und den damit verbundenen Transportkoeffizienten. Man sollte daher eine möglichst vollständige Hydrodynamik mit Viskosität und Wärmeleitfähigkeit verwenden, um theoretische Aussagen über die Dynamik des Systems zu gewinnen.

Da das Experiment¹ bzw. dessen Interpretation Hinweise auf einen Phasenübergang liefert, muß man sich die Frage stellen, was außer einem Phasenübergang in der nukleonischen Materie noch passieren könnte, wenn man Kernmaterie komprimiert. Man wird so völlig zwangsläufig auf die Übergang Nukleonenmaterie-Quarkmaterie geführt.

4. Phasenübergänge in Quarkmaterie

Bei unserern bisherigen Betrachtungen zu den Phasenübergängen in Kernmaterie sind wir davon ausgegangen, daß bei starken Kompressionen der Kernmaterie ($\rho \sim 8\rho_0$) Nukleonen die relevanten Bausteine der Materie sind. Dies ist jedoch nach den heutigen Vorstellungen bereits bei etwa $\rho \sim 3$ bis $5\rho_0$ nicht mehr der Fall: Die Nukleonen überlappen dann bereits so stark, daß die Substruktur der Nukleonen eine entscheidende Rolle spielt. Die Dichte ρ_{cr} des Nukleon-Quark-Phasenübergangs sollte etwa

$$\rho_{cr} = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r_N} \right)^3 \quad \text{sein,}$$

wobei $r_0 \sim 1.2$ fm der nukleare Radiusparameter und $r_N \sim 0.7$ fm der Radius des Nukleons ist. Somit ist $\rho_{cr} \sim 5\rho_0$! Nach der nahezu allgemein anerkannten Meinung ist ein Nukleon aus drei Quarks aufgebaut. Quarks treten in mehreren Flavours (u, d, s...) auf: in konventioneller Kernmaterie spielen jedoch nur u und d eine wesentliche Rolle. Sobald die Nukleonen in der Kernmaterie in Quarks dissoziieren, ändert sich die fundamentale Wechselwirkung: die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wird durch Austausch von $\pi, \rho, \omega, \dots$ -Mesonen vermittelt, während die Wechselwirkung zwischen Quarks bzw. Quarks und Antiquarks von masselosen Vektormesonen, den sogenannten Gluonen vermittelt wird. Die Gruppenstruktur der Spin-Isospin-

Wechselwirkung der Nukleonen ist $SU(2) \otimes SU(2)$. Im Falle der Quarks hat man $SU(3)$ -Struktur: die entsprechende Quantenzahl wird als Color (Farbe) bezeichnet. Die grundlegende Theorie der Quark-Quark-Wechselwirkung trägt daher den Namen Quanten-Chromodynamik¹⁸.

4.1 Die Quark-Quark-Wechselwirkung

Die Quantenchromodynamik geht davon aus, daß die Wechselwirkung zwischen Quarks durch Austausch eines Oktetts von Vektor-Gluon-Feldern vermittelt wird, die mit $(g_\alpha)_\mu$ bezeichnet werden. Dabei sind $\alpha = 1, \dots, 8$ die Indizes, die die Oktettdarstellung der Colorgruppe $SU_c(3)$ (c steht für Color) durchnummerieren. $\mu = 0, 1, 2, 3$ sind die Raum-Zeit-Indizes. Mit den Quarkfeldern q lautet dann die Wechselwirkung-Lagrangefunktion³⁴

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_{\alpha, \mu} g (\bar{q} \gamma_\mu \lambda_\alpha^c q) (g_\alpha)_\mu \quad (4.1)$$

Hier sind g die Kopplungskonstante und λ_α^c die Gell-Mann-Matrizen, d.h., die Generatoren der Gruppe $SU_c(3)$. Im nichtrelativistischen Grenzfall führt diese Wechselwirkung bei Ein-Gluon-Austausch auf³⁴:

$$\mathcal{U} = \frac{g^2}{k^2} \sum_i \lambda_{(1)}^i \lambda_{(2)}^i \quad (4.2)$$

Die Kopplungskonstante $f = g^2 = 4\pi\alpha_c$, wobei α_c die Feinstruktur-Konstante der Quantenchromodynamik ist. Sie hängt vom Impuls des ausgetauschten Gluons ab^{35,36}.

$$\alpha_c(k) = \frac{12\pi}{33-2n_f} \frac{1}{\ln(k^2/\Lambda^2)} \quad (4.3)$$

Dabei ist n_f die Anzahl der Quarkflavors, d.h., in unserem Fall $n_f = 3$ (u, d, s). Λ ist ein Parameter der Theorie, der aus der Anpassung an experimentelle Daten gewonnen wurde (Charmoniumdaten). Um die Rechnungen zu vereinfachen, ersetzen wir $k \rightarrow k_F$, den Fermiimpuls. Dies entspricht der Annahme, daß die langreichweitigen Quark-Quark-Kräfte abgeschirmt werden. Damit lautet dann die Wechselwirkung:

$$U_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 4\pi\alpha_c(k_F) \frac{1}{k_F^2} \sum_{i=1}^8 \lambda_{\alpha\gamma}^i \lambda_{\beta\delta}^i \quad (4.4)$$

Zur Abkürzung bezeichnen wir

$$f = f(k_F) = 4\pi\alpha_c(k_F) \frac{1}{k_F^2} \quad (4.5)$$

und erhalten somit

$$U_{\alpha\beta,\gamma\delta} = f \sum_{i=1}^8 \lambda_{\alpha\gamma}^i \lambda_{\beta\delta}^i \quad (4.6)$$

Diese Wechselwirkung wollen wir im Folgenden zur Grundlage unserer Betrachtungen über die Möglichkeit einer Color-Kondensation in der Quarkmaterie machen. Diese Untersuchung wird uns eine Aussage über den Grundzustand der Quarkmaterie erlauben.

4.2 Der Grundzustand der Quarkmaterie im Rahmen eines SU (3) - Color - Modells

Wir verwenden zur Untersuchung des Colorfreiheitsgrades das gleiche Verfahren, wie im Zusammenhang mit den Nukleonen, d.h., wir definieren die Greensfunktion

$$G_{\alpha\beta}(k, \omega) = \frac{1}{3} \left[g(k, \omega) \delta_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta}^k \Lambda_k(k, \omega) \right] \quad (4.7)$$

Die Colordichte ist proportional zu

$$\text{Spur} (\lambda_{\gamma\alpha}^k G_{\alpha\beta}) = \frac{2}{3} \Lambda_k \quad (4.8)$$

d.h., der achtkomponentige Vektor der Colordichte ist

$$C_k = -\frac{2}{3} i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \Lambda_k(k, \omega) e^{-i\omega 0^-} \quad (4.9)$$

während die Teilchendichte durch

$$\rho = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} g(k, \omega) e^{-i\omega 0^-} \quad (4.10)$$

gegeben ist. Die Selbstenergie in Hartree-Fock-Näherung ist nach (3.22) und (3.29) mit (4.6) und (4.7)

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\gamma} = & \left[-\frac{2}{9} f \rho - \frac{1}{3} f d_{ijk} C^k \right] \delta_{\alpha\gamma} \\ & + \left[-\frac{1}{3} f d_{iim} \rho + \frac{2}{3} f C_m - \frac{1}{2} f (i f_{ikj} + d_{ikj})(i f_{jim} + d_{ijm}) C^k \right] \lambda_{\alpha\gamma}^m \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dabei sind d_{ikj} und f_{ikj} die total symmetrischen bzw. total antisymmetrischen Strukturkonstanten der SU(3) (siehe Anhang C).

Unter den acht Generatoren der SU(3) kann man zwei diagonal wählen: λ_3 und λ_8 , die wir als Color-Isospin und Color-Hyperladung bezeichnen wollen. Wir untersuchen im Folgenden die Kondensation in diese beiden Richtungen: da

$$\sum_i d_{iim} = 0 \text{ für alle } i, m = 1, \dots, 8$$

und wegen der besonderen Struktur der Gruppe SU(3) vereinfacht sich die Selbstenergie (4.11) zu

$$\sum_{\alpha\gamma} = -\frac{2}{9} f f \delta_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} f C_3 \lambda_{\alpha\gamma}^3 - \left(\frac{1}{6} - \sqrt{3}\right) f C_8 \lambda_{\alpha\gamma}^8 \quad (4.12)$$

d.h., es gibt keine Mischterme zwischen λ_3 und λ_8 ; wir können beide Richtungen getrennt betrachten. Zunächst untersuchen wir die Kondensation in Color-Hyperladungsrichtung. Dazu setzen wir $F_1 = \left(\frac{1}{6} - \sqrt{3}\right) f$, setzen in die Dysongleichung ein und lösen auf:

$$g(k, \omega) = \frac{3F - \sqrt{3}}{F^2 - \frac{1}{3}\sqrt{3} F_1 C F - \frac{2}{3} F_1^2 C^2} \quad (4.13)$$

$$\Lambda(k, \omega) = \frac{-3F_1}{F^2 - \frac{1}{3}\sqrt{3} F_1 C F - \frac{2}{3} F_1^2 C^2} \quad (4.14)$$

$$\text{wobei } C = C_8 \text{ und } F = \omega - (\epsilon_k - \mu) + i\delta - \frac{2}{9} f f. \quad (4.15)$$

Wir integrieren (4.13) und (4.14) bezüglich k und ω und erhalten völlig analog zur Rechnung im nuklearen Fall die Gleichung für den Ordnungsparameter der Color-Hypercharge-Magnetisierung

$$\frac{F_1 f}{\epsilon_F} = \frac{1}{M_8} \left[\left(1 + \frac{M_8}{2}\right)^{1/3} - \left(1 - M_8\right)^{1/3} \right] \quad (4.16)$$

Die Polarisierungskurve ist in Fig. 17 dargestellt.

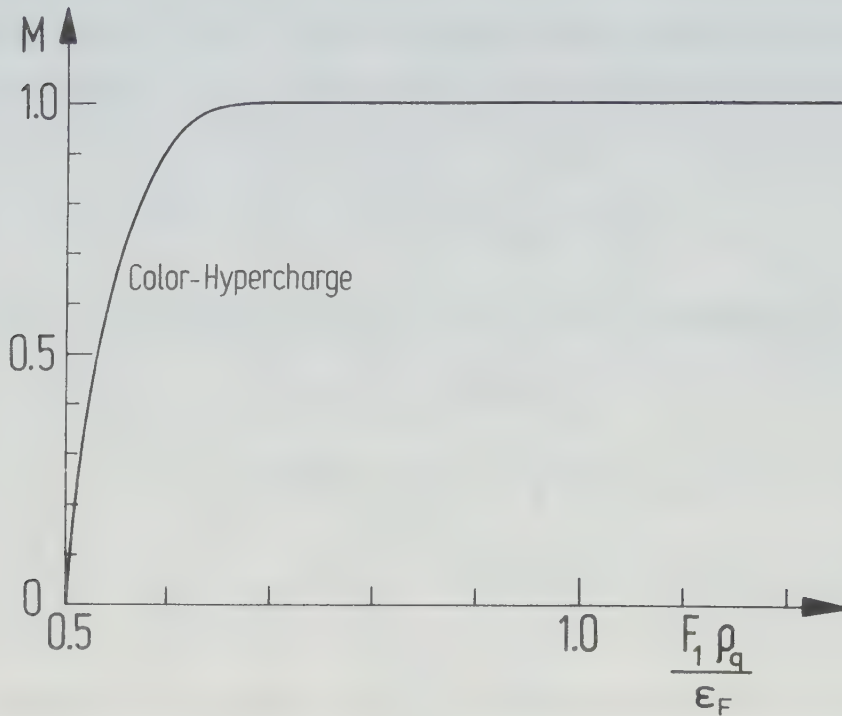


Fig. 17: Die Phasenübergangskurve $M \left(\frac{F_1 \rho}{\epsilon_F} \right)$ für die Color-Kondensation der Quarkmaterie. Die Color-Hyperladungsdichte kondensiert bei $\frac{F_1 \rho}{\epsilon_F} = \frac{1}{2}$.

Dabei haben wir angenommen, daß das Quarkgas als relativistisches Fermigas beschrieben werden kann, d.h., die Masse der Quarks ist vernachlässigbar. Dies ist sicher gut erfüllt: $m_u \sim m_d \sim 5 \text{ MeV}$. Damit sind die (3.46) entsprechenden Quasiteilchenenergien

$$\omega_{\pm} = k - \frac{2}{9} \mu \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \sqrt{3} F_1 C_8 \\ +\frac{2}{3} \sqrt{3} F_1 C_8 \end{array} \right. \quad (4.17)$$

und die Fermiimpulse:

$$k_F^\pm = \mu + \frac{2}{9} f g \begin{cases} +\frac{1}{3}\sqrt{3} F_1 C_8 \\ -\frac{2}{3}\sqrt{3} F_1 C_8 \end{cases} \quad (4.18)$$

Wir können nun nach Abschnitt (3.2) die Energie pro Teilchen in Einheiten der Fermienergie berechnen:

$$E = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} [k + \omega + \mu] g(k, \omega) e^{-i\omega 0^-} \quad (4.19)$$

und erhalten

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \left[2 \left(1 + \frac{M_8}{2} \right)^{1/3} + \left(1 - M_8 \right)^{1/3} \right] - \frac{1}{9} \frac{f g}{\epsilon_F} - \frac{1}{6} \frac{F_1 g}{\epsilon_F} M_8 \quad (4.20)$$

Damit ein Phasenübergang auftritt, muß $F_1 > 0$ sein; dies ist aber nicht der Fall, denn $F_1 = \left(\frac{1}{6} - \sqrt{3} \right) f$ und $f = 4\pi \alpha_c(k_F) / k_F^2 > 0$, d.h., mit $\epsilon_F = k_F = \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{1/3} g^{1/3}$ (der statistische Faktor ist wegen des Spins $\left(\frac{1}{2} \right)$, der zwei Flavours und der drei Quarkcolors $g = 12$)

$$\frac{F_1 g}{\epsilon_F} \simeq -4\alpha_c \quad (4.21)$$

Entwickeln wir (4.20) für $M_8 \ll 1$, so sehen wir, daß der Phasenübergang bei

$$\frac{F_1 g}{\epsilon_F} = \frac{1}{2} \quad (4.22)$$

einsetzt. Für die Wechselwirkung im Charmonium kann man aus dem Bag-Modell α_c bestimmen. Man erhält $\alpha_c \sim 0.5$, d.h.,

$$\left(\frac{F_1 g}{\epsilon_F} \right)_{\text{Bag}} \sim -2 \quad (4.23)$$

d.h., die bisher bekannten Hadronenspektren lassen darauf schließen, daß es keinen Phasenübergang bezüglich des Colorfreiheitsgrades in Quarkmaterie gibt (das gleiche Argument gilt auch für den Colorisospin). Im Fall des Pionenkondensats haben wir gesehen, daß die Kopplungskonstante g'_0 bei $g=g_0$ positiv war, d.h., es gibt auch dort in dieser Situation keinen Phasenübergang. Erst die Langreichweitigkeit des Ein-Pion-Austauschs führt dazu, daß bei endlichem Impuls k die Kopplungskonstante $g'_0 < 0$ wird. Dieses Verhalten beruht allerdings darauf, daß die verschiedenen Bereiche des Nukleon-Nukleon-Potentials durch Austausch verschieden schwerer Mesonen erzeugt werden: der Hard-core durch ω - und ρ -Austausch, der langreichweitige Teil durch Austausch von Pionen in der attraktiven p-Welle. Die "ausgewogene" Balance zwischen diesen beiden Anteilen ermöglicht das Pionenkondensat!

In der Quantenchromodynamik ist die Situation völlig anders³⁷: hier geht man davon aus, daß die Wechselwirkung durch Austausch eines Vektormesons, des Gluons, vermittelt wird, d.h., die Lagrangefunktion ist vollständig durch (4.1) gegeben. Das effektive Verhalten der Kopplungskonstante α_c kann für die QCD aus Betrachtungen im Rahmen der Renomierungsgruppe³⁷ ableiten. Die Argumentation soll hier nur kurz wiederholt werden: man betrachtet die freie

Energie Ω , von der nach der Renormierung der QCD ein endlicher Teil

$$\Omega_R(\mu_i, g_R(\nu, m_i), m_i; \nu) \quad (4.24)$$

übrig bleibt. Dabei sind: μ_i die chemischen Potentiale der verschiedenen Quarkflavors, m_i ihre physikalischen Massen, g_R die renormierte Kopplungskonstante und $p^2 = -\nu^2$ ein Impulscutoff, der die Theorie renormiert. Man fordert nun, daß g_R von der Wahl des Abschneide-Punktes ν nicht abhängt, d.h.,

$$\left(\frac{d\Omega_R}{d\nu}\right)_{\mu_i} = \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{\partial g_R}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial g_R}\right) \Omega_R(\mu_i, g_R, m_i; \nu) = 0 \quad (4.25)$$

Weiterhin verlangt man, daß sich Ω_R (Dimension: Energie⁴) bei einer Skalentransformation k aller Energien wie eine homogene Funktion verhält, d.h.,

$$\Omega_R(k\mu_i, g_R, km_i; k\nu) = k^4 \Omega_R(\mu_i, g_R, m_i; \nu) \quad (4.26)$$

Differentiation nach k und $k = 1$ ergeben dann mit (4.25)

$$\left(\sum_i \left(\mu_i \frac{\partial}{\partial \mu_i} + m_i \frac{\partial}{\partial m_i}\right) + \nu \frac{\partial}{\partial \nu} - 4\right) \Omega_R(\mu_i, g_R, m_i; \nu) = 0 \quad (4.27)$$

Verwendet man (4.25) um $\frac{\partial}{\partial \nu}$ zu eliminieren und definiert

$$\beta(g_R, m_i/\nu) = \frac{\partial g_R}{\partial \ln \nu} \quad (4.28)$$

so folgt aus (4.27)

$$\left[\sum_i \left(\mu_i \frac{\partial}{\partial \mu_i} + m_i \frac{\partial}{\partial m_i}\right) - \beta(g_R, m_i/\nu) \frac{\partial}{\partial g_R} - 4\right] \Omega_R(\mu_i, g_R, m_i; \nu) = 0 \quad (4.29)$$

In erster nicht verschwindender Ordnung in g_R ist gegeben durch³⁸:

$$\beta(g_R, m_i/v) = - (33 - 2 \sum_i F(m_i^2/v^2)) \frac{g_R^3}{48 \pi^2} \quad (4.30)$$

wobei $F(x) = 1 - 6x + \frac{12x^2}{\sigma} \ln \frac{\sigma+1}{\sigma-1}$ mit $\sigma = \sqrt{1+4x}$

Ist $m_i^2 \ll v^2$, so folgt $F(0) = 1$, d.h.,

$$\beta(g_R) = - (33 - 2n_f) \frac{g_R^3}{48 \pi^2} \quad (4.31)$$

wobei n_f die Anzahl der Flavours ist.

Die Renomierungsgruppengleichung (4.29) hat eine Lösung der Form

$$\Omega_R(\mu_i, g_R, m_i; v) = \kappa^4 \Omega_R(\mu_i/\kappa, g(\kappa), m_i/\kappa; v) \quad (4.32)$$

wobei $g(\kappa)$ definiert ist als:

$$\kappa \frac{\partial g(\kappa)}{\partial \kappa} = \beta(g(\kappa), m_i/\kappa v) \quad (4.33)$$

mit der Randbedingung $g(1) = g_R$. Wählt man nun als charakteristische Energieskala der Quarks das chemische Potential als (symmetrisch bezüglich Flavours) $\mu = \mu_i$ (für alle i), d.h., $\kappa = \mu/v$, so kann man die Gleichung für die laufende (d.h. μ/v abhängige) Kopplungskonstante (4.33) lösen und erhält

$$g^2\left(\frac{\mu}{v}\right) = \frac{g_R^2}{1 + \frac{g_R^2}{24\pi^2} \left[33 \ln \frac{\mu}{v} - \sum_i \ln \frac{\mu^2 + 5m_i^2}{v^2 + 5m_i^2} \right]} \quad (4.34)$$

Sind die Quarkmassen $m_i \ll \mu, v$, so ist der Beitrag dieser leichten Quarks zu g^2 :

$$g^{-2}\left(\frac{\mu}{v}\right) \sim - \frac{1}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{v}\right) \quad (4.35)$$

Definiert man einen Parameter $\Lambda = \sqrt{e^{-\frac{1}{b g_2^2}}}$ (4.36)

und die dichteabhängige Feinstrukturkonstante $\alpha_c(\mu)$ als

$$\alpha_c(\mu) = \frac{g^2(\frac{\mu}{\Lambda})}{4\pi} \quad (4.37)$$

so folgt:

$$\alpha_c(\mu) = \frac{12\pi}{(33-2n_f) \ln(\mu/\Lambda)} \quad (4.38)$$

mit b aus (4.31). Dies ist aber genau die Beziehung (4.3). Gleichung (4.38) gilt, solange $\alpha_c(\mu) \ll 1$ ist. An (4.38) fällt sofort auf, daß α_c für großes μ und somit für hohe Dichten verschwindet: $\alpha_c \rightarrow 0$. Darin spiegelt sich die Eigenschaft der Quarks wieder, sich in kurzen Abständen voneinander wie freie Teilchen zu verhalten. Man bezeichnet diese Eigenschaft als "Asymptotic freedom". Der Bereich kleiner Dichten ($k \rightarrow 0$) ist einer Analyse mit Hilfe der Renormierungsgruppentheorie nicht zugänglich. Die Hoffnung der Theoretiker besteht darin, daß $\alpha_c \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow 0$: damit würden die Kräfte zwischen den Quarks beliebig anwachsen, wenn man versucht, sie auseinanderzuziehen. Diese Eigenschaft wird als "Quarkconfinement" bezeichnet. Sie soll erklären, daß bis heute experimentell noch keine freien Quarks beobachtet wurden.

In Fig. 18 ist die Abhängigkeit von α_c von der Dichte der Baryonen dargestellt³⁶. Diese Rechnungen im Rahmen der Quantenchromodynamik lassen keine Hoffnungen für einen Color-Phasenübergang offen, da $\alpha_c > 0$ für alle ρ . Es ist

jedoch nicht ausgeschlossen, daß in einem intermediären Bereich Vielkörperkräfte zwischen den Quarks das effektive Verhalten von α_c modifizieren können. Solche Möglichkeiten

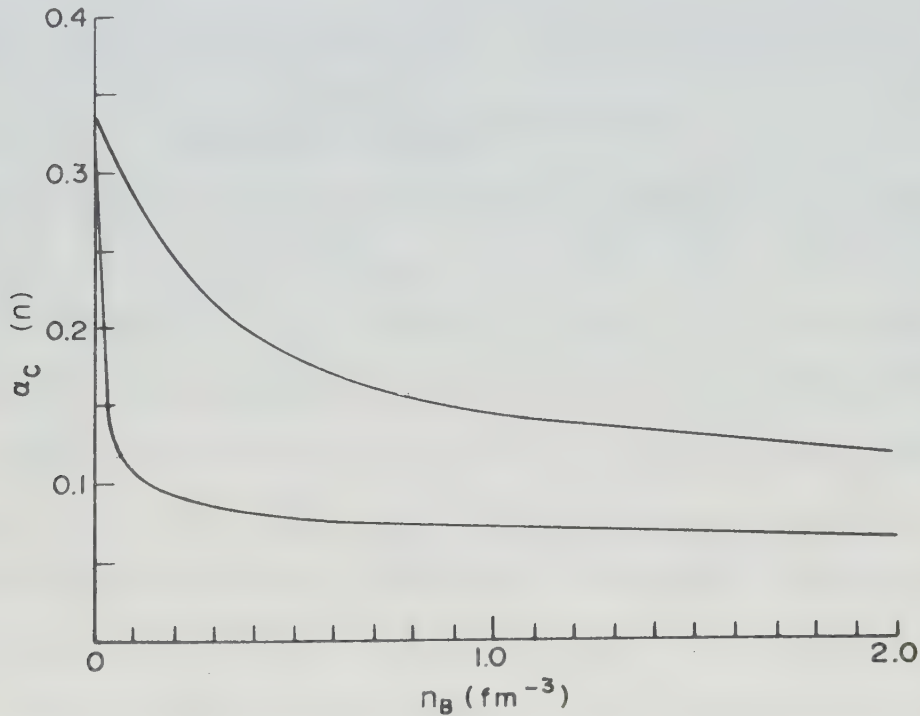


Fig. 18: Die Abhängigkeit der Kopplungskonstanten α_c der Quantenchromodynamik für zwei verschiedene Modelle nach Freedman³⁶ von der Baryondichte ist dargestellt.

werden gegenwärtig untersucht. Es ist darüber hinaus keineswegs klar, ob Vektorgluonen die Physik des Colorfreiheitsgrades allein beschreiben. Es wird in der Literatur auch die Möglichkeit skalarer Gluonen in Betracht gezogen³⁹. Der Einfluß dieser Felder ist noch ungeklärt.

Solange jedoch $M = 0$, ist die Energie pro Quark nach (4.20) gegeben durch

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{4} \epsilon_F - \frac{1}{9} f g \quad (4.39)$$

wobei $f = 4\pi \alpha_c (k_F) \frac{1}{k_F^2}$ und $\epsilon_F = \left(\frac{\pi^2}{2} \right)^{1/3} g^{1/3}$.

Der zweite Term in (4.39) ist für die Stabilisierung der Quarkmaterie aufgrund der Wechselwirkung verantwortlich.

Der erste Term ist die Energie pro Teilchen eines freien relativistischen Fermigas. Qualitativ kann die Zustandsgleichung des Quarkgases im Rahmen des MIT-Bag-Modells verstanden werden, das im Folgenden kurz dargestellt wird.

5. Die Zustandsgleichung der hadronischen Materie

Bei der Diskussion einer einheitlichen Zustandsgleichung der hadronischen Materie muß man davon ausgehen, daß die verschiedenen Bereiche der Baryondichte durch verschiedene Modelle beschrieben werden. Im Bereich von

ϱ bis ca. $(5 - 10)\varrho_0$ bleiben die Nukleonen intakt, d.h., die Theorie der Kernmaterie ist anwendbar mit ihren Modifikationen, wie sie in den Abschnitten 2 und 3 beschrieben wurde. Bei höheren Dichten kann ein Phasenübergang zur Quarkmaterie stattfinden. Dieser neue Zustand der Materie ist im Rahmen der Quantenchromodynamik bzw. eines vereinfachten phänomenologischen Modells, des MIT-Bag-Modells⁴⁰ erklärbar. Dieses Modell geht davon aus, daß Quarks in einem begrenzten Raumgebiet "eingesperrt" sind. Dieses Raumgebiet wird als "Bag" bezeichnet. Es wird nun eine "Bag"-Energie E_B angenommen, die den Bag zusammenhält und mit dem Volumen anwächst

$$E_B = \mathcal{B}V = \mathcal{B} \frac{1}{\varrho_B} \quad (5.1)$$

Dazu wird die Fermienergie des relativistischen Quarkgases addiert, wobei Ein-Gluon-Austausch-Korrekturen berücksichtigt werden. Damit wird die Gesamtenergie pro Quark

$$\frac{E}{N_q} = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi^2}{2} \right)^{1/3} \hbar c (1 + \alpha_c) \varrho_B^{1/3} + \frac{\mathcal{B}}{\varrho_B} \quad (5.2)$$

Trägt man diese Energie gegen die Nukleonendichte auf (Fig. 19), so erhält man das folgende Bild: Quarkmaterie

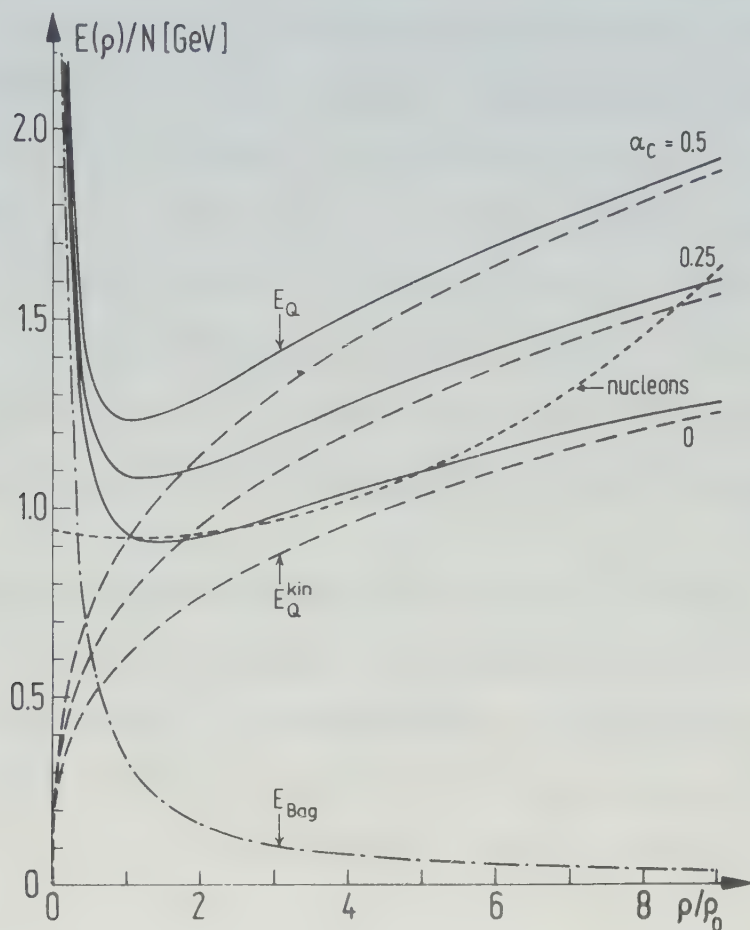


Fig. 19: zeigt die Zustandsgleichung der Quarkmaterie und der Kernmaterie (gestrichelt) für verschiedene Werte von α_c . Die Quarkzustandsgleichung setzt sich aus der kinetischen und der Bagenergie zusammen (siehe Gl. (5.2)) wobei $B = 56 \text{ MeV}$ verwendet wurde⁴⁰.

liegt für den üblichen Parameter $\alpha_c \sim 0,55$ etwa 300 MeV über der nuklearen Zustandsgleichung. Erst bei hohen Dichten

$g \sim (8 - 10)g_0$ schneiden sich beide Zustandsgleichungen, d.h., ein Übergang vom nuklearen in den Quarkzustand wird möglich. Ob der Übergang auch dynamisch auftritt, ist damit jedoch noch nicht gesagt. Es ist jedoch zu beachten, daß $\alpha_c \sim 0,55$ nur in normaler nichtkomprimierter Materie ist. Bei höheren Dichten geht $\alpha_c \longrightarrow 0$, d.h., man schneidet die verschiedenen α_c -Kurven in Fig. 19 und gelangt für sehr große Dichten auf die Zustandsgleichung für $\alpha_c = 0$. Dieser Effekt verschiebt die kritische Dichte zu kleineren Dichten, d.h., man kann den Phasenübergang bei $g \sim (4 - 6)g_0$ erwarten.

Im Zusammenhang mit dieser Fragestellung sind noch viele Fragen offen: etwa die Möglichkeit einer Kondensation bezüglich des Flavorfreiheitsgrades analog zum Pionenkondensat in Kernmaterie. Diese Fragen wiederum hängen mit der Quantenflavordynamik zusammen.

6. Schlußfolgerungen und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Methode entwickelt, Kondensationsphänomene in Kernmaterie bezüglich der Spin- und der Isospinfreiheitsgrade zu beschreiben. Diese Methode hat den Vorteil, auch jenseits des kritischen Punktes anwendbar zu sein. Diese Beschreibung ist nur noch im Rahmen des σ -Modells möglich. Das σ -Modell ist jedoch ein Modell für ein Teilchen, während das hier diskutierte Modell ein Vielteilchenmodell ist. Es ist daher für die Belange der Kernphysik wesentlich geeigneter als das σ -Modell.

Die Struktur des Pionenkondensats ist im Rahmen des Modells leicht verständlich: es bildet sich im Kern eine Spin-Isospinwelle. Dabei wird eine Kondensationsenergie von etwa 10 MeV frei, die in der nuklearen Zustandsgleichung ein van der Waals-artiges Verhalten hervorruft. Ausgeprägte Minima aufgrund des Pionenkondensats sind im vorgelegten Modell äußerst fraglich. Dies gilt auch für die Stabilität des Kondensats gegen die im Schwerionenstoß erzeugten Temperaturen. Die Phasenübergangskurven liegen im Grenzgebiet der Stabilität, d.h., das Pionenkondensat ist eine sehr "schwache" Anregung der kollektiven Spin-Isospinfreiheitsgrade. Diese "leichte" Zerstörbarkeit wurde auch für Magnetfelder nachgewiesen⁴¹: bereits ein infinitesimales Magnetfeld reicht aus, um die Pionenkondensation zu verhindern. Im relativistischen

Schwerionenstoß werden riesige Magnetfelder erzeugt! Diese Diskussion läßt Zweifel an einer unmittelbaren Bedeutung des Pionenkondensats für die relativistische Schwerionenphysik aufkommen. Spinwellen und Isospinwellen wurden in allen physikalischen Konsequenzen in der vorliegenden Arbeit noch nicht diskutiert: verwendet man die üblichen Werte für f_0 etc., dann sollten diese Anregungen im Kern nicht vorkommen. Die k-Abhängigkeit der Parameter f'_0 , g_0 ist jedoch weitgehend unbekannt, d.h., man kann noch keine entgültige Aussage machen.

Während Kondensation im nuklearen Zustand zweifelhaft ist, kann die Möglichkeit des "Phasenübergangs" nukleonische Materie-Quarkmaterie nicht ausgeschlossen werden. Man kann ihn durchaus in einem mit den heutigen Beschleunigern erreichbaren Gebiet erwarten (d.h. $\rho \sim (5 - 10) \rho_0$). Ein solcher Phasenübergang könnte daher die Möglichkeit eröffnen, die Gültigkeit der Quantenchromodynamik bei hohen Baryondichten und hohen Temperaturen zu untersuchen. Weiterhin ist die Bedeutung von Vielkörperkräften im Rahmen der QCD noch unklar. Das Gebiet der relativistischen Schwerionenphysik kann bei der Untersuchung solcher Probleme eine wesentliche Rolle spielen.

Anhang A: Die Observablen in der Greensfunktionsmethode³¹

Die Einteilchen-Greensfunktion ($T = 0$) ist definiert als

$$i G_{\alpha\beta}(\vec{x}t, \vec{x}'t') = \frac{\langle \phi_0 | T \{ \hat{\psi}_{H\alpha}(\vec{x}t) \hat{\psi}_{H\alpha}^{\dagger}(\vec{x}'t') \} | \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle} \quad (\text{A.1})$$

wobei $|\phi_0\rangle$ der Heisenberg-Grundzustand des wechselwirkenden Systems: $\hat{H}|\phi_0\rangle = E|\phi_0\rangle$ und $\hat{\psi}_{H\alpha}(\vec{x},t)$ ist der Heisenberg-Operator mit der Zeitabhängigkeit

$$\hat{\psi}_{H\alpha}(\vec{x}t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} \quad (\text{A.2})$$

und T ist der übliche Zeitordnungsoperator. Betrachtet man einen Einteilchen-Operator

$$\hat{J} = \int d^3x \hat{y}(\vec{x})$$

wobei $\hat{y}(\vec{x})$ die zweitquantisierte Dichte des Operators

$J_{\beta\alpha}(\vec{x})$ in 1. Quantisierung ist:

$$\hat{y}(\vec{x}) = \sum_{\alpha\beta} \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\vec{x}) J_{\beta\alpha}(\vec{x}) \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}) \quad (\text{A.3})$$

Der Erwartungswert im Grundzustand ist:

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}(x) \rangle &= \frac{\langle \phi_0 | \hat{J}(\vec{x}) | \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle} \\ &= \lim_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \sum_{\alpha\beta} J_{\beta\alpha}(\vec{x}) \frac{\langle \phi_0 | \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\vec{x}') \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}) | \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle} \\ &= -i \lim_{t' \rightarrow t^+} \lim_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \sum_{\alpha\beta} J_{\beta\alpha}(\vec{x}) G_{\alpha\beta}(\vec{x}t, \vec{x}'t') \\ &= -i \lim_{t' \rightarrow t^+} \lim_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \text{Spur} [J(\vec{x}) G(\vec{x}t, \vec{x}'t')] ; \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$t^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (t + \varepsilon)$$

d.h. zum Beispiel

$$\langle \hat{n}(\vec{x}) \rangle = -i \text{Spur } G(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$$

$$\langle \vec{\hat{\sigma}}(\vec{x}) \rangle = -i \text{Spur } [\vec{\sigma} \cdot G(\vec{x}, t; \vec{x}', t')]$$

(A. 5)

sind lokale Teilchenzahldichte, bzw. Spindichte. Analog erhält man andere Observable nach (A. 4) wie etwa die Energie usw.

Anhang B: Die Eigenschaften der Temperatur-Greenfunktion^{12,31}

Bei der Ableitung der Eigenschaften der Temperatur-Greenfunktion geht man vom großkanonischen Ensemble aus, d.h., wir betrachten ein thermodynamisches System mit variabler Teilchenzahl N ; daher müssen wir einen großkanonischen Hamiltonoperator $\hat{K} = \hat{H} - \mu \hat{N}$ verwenden. Die Partitionsfunktion und der statistische Operator sind damit gegeben als

$$Z_G = e^{-\beta \Omega} = \text{Spur } e^{-\beta \hat{K}} ; \quad \hat{g}_G = Z_G^{-1} e^{-\beta \hat{K}} = e^{\beta(\Omega - \hat{K})} \quad (\text{B.1})$$

wobei $\beta = (\hbar T)^{-1}$. Die Schrödinger-Feldoperatoren lassen sich in Heisenbergoperatoren durch

$$\hat{\psi}_{k\alpha}(\vec{x}, \tau) = e^{\hat{K}\tau/\hbar} \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}) e^{-\hat{K}\tau/\hbar} \quad (\text{B.2})$$

transformieren. $\hat{\psi}_{k\alpha}^+$ ist jedoch nur dann Adjungierte zu $\hat{\psi}_{k\alpha}$, wenn τ imaginär ist, d.h. $\tau = it$.

Man definiert nun die Einteilchen-Greenfunktion als

$$G_{\alpha\beta}(\vec{x}\tau, \vec{x}'\tau') \equiv -\text{Spur} \left\{ \hat{g}_G T_{\tau} [\hat{\psi}_{k\alpha}(\vec{x}, \tau) \hat{\psi}_{k\alpha}(\vec{x}', \tau')] \right\} \quad (\text{B.3})$$

T_{τ} ordnet dabei die Operatoren bezüglich τ : Operatoren mit den kleinsten τ -Werten stehen am weitesten rechts.

Der Erwartungswert (B.3) wird bezüglich eines vollständigen Satzes mit der Wichtung durch $\hat{g}_G$ berechnet. Die Relationen zwischen $\hat{g}$ und den Observablen bleiben unverändert:

so ist z.B.³¹.

$$\text{Spur } G(\vec{x}, \tau; \vec{x}, \tau + \hbar) = \sum_{\alpha} \text{Spur} [\hat{g}_G \hat{\psi}_{k\alpha}^+(\vec{x}, \tau) \hat{\psi}_{k\alpha}(\vec{x}, \tau)] =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\beta\Omega} \sum_{\alpha} \text{Spur} \left[e^{-\beta\hat{k}} e^{\hat{k}\tau/\hbar} \hat{\psi}_{\alpha}^{+}(\vec{x}) \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}) e^{-\hat{k}\tau/\hbar} \right] \\
&= e^{\beta\Omega} \sum_{\alpha} \text{Spur} \left[e^{-\beta\hat{k}} \hat{\psi}_{\alpha}^{+}(\vec{x}) \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}) \right] \equiv \langle \hat{n}(\vec{x}) \rangle
\end{aligned} \tag{B.4}$$

d.h., die gesamte Teilchenzahl ist:

$$N = \int d^3x \text{Spur } G(\vec{x}, \tau; \vec{x}, \tau^+) \tag{B.5}$$

Dabei ist

$$\tau^+ = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (\tau + \eta)$$

Eine ganz wesentliche Eigenschaft der Greenfunktion (B.3)

ist ihre Periodizität: wenn wir der Einfachheit halber annehmen, daß $0 < \tau' < \beta$, so läßt sich mit (B.3) und (B.4)

leicht zeigen, daß

$$G_{\alpha\beta}(\vec{x}, 0; \vec{x}', \tau') = -G_{\alpha\beta}(\vec{x}, \beta; \vec{x}', \tau')$$

$$\text{und} \quad G_{\alpha\beta}(\vec{x}, \tau; \vec{x}', 0) = -G_{\alpha\beta}(\vec{x}, \tau; \vec{x}', \beta) \tag{B.6}$$

d.h., G ist periodisch mit der Periode 2β im Bereich

$0 \leq \tau, \tau' \leq \beta$. Meist hängt G nur von $\tau - \tau'$ ab, d.h.,

$$G_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}', \tau - \tau' < 0) = -G_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}', \tau - \tau' + \beta) \tag{B.7}$$

Da $\tau - \tau' < 0$ ist $\tau - \tau' + \beta > 0$ im Bereich $0 \leq \tau, \tau' \leq \beta$.

In diesem Fall setzen wir $\tau = \tau_1 - \tau_2$, d.h.,

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \tau) = G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \tau + 2\beta) \tag{B.8}$$

Wegen dieser Periodizität können wir für G eine Fourierreihe aufschreiben:

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \omega_n) \tag{B.9}$$

wobei $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$ für Fermionen ist. Umgekehrt ist

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \tau) \quad (\text{B.10})$$

Die freie Greenfunktion nimmt damit die Form an³¹

$$G_{\alpha\beta}^0(\vec{h}, \omega_n) = \delta_{\alpha\beta} [i\omega_n - (\epsilon_k^0 - \mu)]^{-1}, \quad \epsilon_k^0 = \frac{\hbar^2}{2m} \quad (\text{B.11})$$

d.h., während die freie Greenfunktion für $T = 0$ auf der reellen ω -Achse ausgewertet wird, ist dies für $T \neq 0$ nicht der Fall: formal läßt sich (B.11) schreiben als

$$G_{\alpha\beta}^0(\vec{h}, \omega_n) = \delta_{\alpha\beta} [\tilde{\omega} - (\epsilon_k^0 - \mu)]^{-1} \quad (\text{B.12})$$

d.h., rein formal hat G^0 dieselbe Struktur wie $G^0(T=0)$, jedoch ist nun $\tilde{\omega} = i\omega_n = i(2n+1)\pi T$, d.h., G wird nur an diskreten Punkten auf der imaginären Achse ausgewertet.

Es sei abschließend angemerkt, daß die hier beschriebene Methode der Temperatur-Greenfunktion zu imaginären Zeiten nicht die einzige Möglichkeit ist, die Temperatur in den Propagatorformalismus einzuführen: die Greensfunktion zu reellen Zeiten³¹ hängt explizit von T und μ ab. Die beiden Verfahren sind äquivalent, die letzte Methode definiert jedoch die Greensfunktion in der gesamten komplexen ω -Ebene.

Anhang C: Generatoren und Vertauschungsrelationen der SU(3)

Die Generatoren der SU(3) sind $F_i = \frac{1}{2} \lambda_i$ ($i = 1, \dots, 8$)

wobei die Gell-Mann-Matrizen λ_i den folgenden Vertauschungsrelationen genügen:

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk} \lambda_k \quad (C.1)$$

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3} \delta_{ij} \mathbb{1} + 2 d_{ijk} \lambda_k \quad (C.2)$$

($[,]$ bezeichnet den Kommutator, $\{, \}$ den Antikommutator).

f_{ijk} und d_{ijk} sind die Strukturkonstanten: f_{ijk} ist total antisymmetrisch in allen Indizes, während die d_{ijk} total symmetrisch sind. Alle nichtverschwindenden Werte sind:

(ijk)	f_{ijk}	ijk	d_{ijk}	ijk	d_{ijk}
123	1	118	$1/\sqrt{3}$	448	$-1/(2\sqrt{3})$
147	$1/2$	146	$1/2$	558	$-1/(2\sqrt{3})$
156	$-1/2$	157	$1/2$	668	$-1/(2\sqrt{3})$
246	$1/2$	228	$1/\sqrt{3}$	778	$-1/(2\sqrt{3})$
257	$1/2$	247	$-1/2$	888	$-1/\sqrt{3}$
345	$1/2$	256	$1/2$		
367	$-1/2$	338	$1/\sqrt{3}$		
458	$\sqrt{3}/2$	344	$1/2$		
678	$\sqrt{3}/2$	355	$1/2$		
		366	$-1/2$		
		377	$-1/2$		

(C.3)

Weiterhin ist $\text{Spur} (\lambda_i \lambda_k) = 2 \delta_{ik}$ und $\text{Spur} \lambda_i = 0$.

Die gebräuchliche Matrixdarstellung der Gell - Mann - Matrizen ist:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0-i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(C.4)

Aus (C.1) und (C.2) kann man die folgende Relation ableiten:

$$\lambda_i \lambda_j = (if_{ijk} + d_{ijk}) \lambda_k + \frac{2}{3} \delta_{ij} \mathbb{1} \quad (C.5)$$

die zur Reduktion der Produkte zweier λ' s sehr nützlich ist.

Literaturverzeichnis

1. W. Greiner, U. Heinz, H. Stöcker, Proc. of the
Symposium on Relativistic Heavy Ion
Research, GSI Darmstadt, März 1978
(R. Bock und R. Stock ed.)
2. A. B. Migdal, JETP 34, 1184 (1972)
3. R. F. Sawyer, D.J. Scalapino, Phys. Rev. D 7, 953 (1973)
4. G. E. Brown, W. Weise, Phys. Rep. 22 C (1975) 279
5. G. E. Brown, W. Weise, Phys. Rep. 27 C (1976) 1
6. A. B. Migdal, Rev. Mod. Phys. 50 (1978) 107
7. V. Ruck, Dissertation, Frankfurt 1977
8. V. Ruck, M. Gyulassy, W. Greiner, Z. Physik A 2 77
(1976) 391
9. M. Gyulassy, W. Greiner, Ann. Phys. 109 (1977) 485
10. D. K. Campbell, R. F. Dashen, J.T. Manassah,
Phys. Rev. D 12 (1975) 979 und 1010
11. T. D. Lee, G.C. Wick, Phys. Rev. D 9 (1974) 2291
12. R. D. Mattuck, A guide to Feynman diagrams in the
many body problem, Mc Graw Hill, New York
1976, Seite 287 ff

13. R. D. Mattuck, B. Johansson, Adv. in Physics 17
(1968) 509
14. J. C. Collins, M. J. Perry, Phys. Rev. Lett. 34
(1975) 1353
15. G. Baym, S. A. Chin, Phys. Lett. 62 B (1976) 241
16. B. D. Keister, L. S. Kisslinger, Phys. Lett 64 B
(1976) 117
17. P. Hasenfratz, J. Kuti, Phys. Rep. 40 (1978) 75 und
Referenzen darin
18. W. Marciano, H. Pagels, Phys. Rep. 36 (1978) 137
und Referenzen darin
19. L. D. Landau, Sov. Phys. JETP 5 (1957) 101
L. D. Landau, Sov. Phys. JETP 8 (1959) 70
20. A. B. Migdal, Theory of Finite Fermi Systems and
Applications to Atomic Nuclei, Inter-
science New York, 1967
21. G. E. Brown, Rev. Mod. Phys. 43 (1971) 1
22. R. F. Frosch, Phys. Rev. 160 (1967) 874
23. S. O. Bäckman, Nucl. Phys. A 120 (1968) 593
24. S. O. Bäckman, Nucl. Phys. A 130 (1969) 427
25. J. M. Eisenberg, W. Greiner, Nuclear Theory Vol. 3:
Microscopic Theory of the nucleus, p. 60;
North Holland, 1972

26. G. A. Rinker, J. Speth, Nuc. Phys. A 306 (1978) 360
27. S. S. Schweber, H. A. Bethe, F. d. Hoffmann, Mesons and Fields II Row, Peterson and Co, 1955.
28. Y. Nambu, Phys. Rev. 117 (1960) 648
29. W. Scheid, W. Greiner, Z. Physik 226 (1969) 365
30. S. O. Bäckman, W. Weise, Phys. Lett. 55 B (1975) 1
31. A. Fetter, J. D. Welecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems, Mc Graw-Hill, 1971
32. L. D. Landau, E. Lifshitz, Statistische Physik, Akademie-Verlag, Berlin 1975
33. D. Schütte, J. d. Providencia, Nuc. Phys. A 282 (1977) 518
34. R. H. Dalitz, in Topics in Quantum Field Theory and Gauge Theories, Salamanca 1977, Springer Lecture Notes in Physics 77 (1978)
35. B. A. Freedman, L. D. Mc Lerran, Phys. Rev. D 16 (1977) 1130 und 1147 und 1169
36. B. A. Freedman, L. D. Mc Lerran, Phys. Rev. D 17 (1978) 1109
37. G. Baym, Neutron Stars and Properties of Matter at High density, Nordita Lectures (1977)
38. E. Poggio, H. Quinn, S. Weinberg, Phys. Rev. D 13 (1976) 1958

- 39. E. Alvarez, R. Hakim, Phys. Rev. D 19 (1979) 1696
- 40. A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn,
V. Weisskopf, Phys. Rev. D 9 (1974) 3471
- 41. B. Harrington, H. Shepard, Phys. Rev. D 19 /1979) 1713

Lebenslauf

Ich wurde am 17. März 1952 als 2. Sohn des Monteurs Franz Ludwig Hofmann und seiner Ehefrau Katharina in Friedberg/Hessen geboren. Vom April 1958 bis April 1963 besuchte ich die Volksschule in Ober-Wöllstadt, bis Oktober 1964 die Realschule Friedberg und anschließend das St. Josefs-Kolleg in Sittard/Niederlande, ein altsprachliches Gymnasium und Internat des deutschen Franziskanerordens. Ab September 1967 war ich Schüler der Augustinerschule in Friedberg, wo ich im Juni 1971 das Zeugnis der Allgemeinen Hochschulreife im mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig erhielt. Seit dem 5.10.1971 studierte ich an der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität in Frankfurt Physik und Mathematik. Die Diplom-Vorprüfung legte ich am 11.7.1973 ab und fertigte anschließend eine Diplomarbeit über "Schockwellen in Schwerionenstößen" im Institut für theoretische Physik bei Herrn Prof. Dr. Walter Greiner an. Die Diplom-Hauptprüfung legte ich am 4.4.1975 ab. Seitdem bin ich wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der J.W. Goethe-Universität und arbeite bei Prof. Dr. W. Greiner an meiner Dissertation.

Ich bin seit 1975 mit Regina Hofmann geb. Zecha verheiratet. Wir haben eine dreijährige Tochter.

Meine akademischen Lehrer waren:

Prof. Dr. W. Greiner; Prof. Dr. W. Martienssen;

Prof. Dr. F. Constantinescu; Prof. Dr. H. Hartmann;

Prof. Dr. Schopper; Prof. Dr. Reichert; Prof. Dr. Bauer;

Prof. Dr. Gerritzen; Prof. Dr. Gerhardt; Prof. Dr. Elze;

Prof. Dr. Weidmann; Prof. Dr. Scheid; Prof. Dr. Toepffer;

Prof. Dr. Münster.

Danksagung

Meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. Walter Greiner danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein stetes Interesse an ihrem Fortgang.

Weiterhin bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Berndt Müller und Herrn Prof. Dr. Joachim Maruhn für ihr Interesse und die vielen hilfreichen Diskussionen.

Meinen Kollegen Horst Stöcker, Wilfried Betz, Joachim Reinhardt und Wolfgang Schäfer danke ich für die vielen Anregungen.

Schließlich bedanke ich mich bei meiner Frau Regina für ihre stete Unterstützung und das Schreiben der Arbeit ganz besonders.

Frau B. Utschig und Frl. G. Roth danke ich für das Zeichnen der Figuren, Herrn W. Brose für den Druck, sowie den Rechenzentren der Gesellschaft für Schwerionenforschung, Darmstadt und der J.W. Goethe-Universität Frankfurt für die zur Verfügung gestellte Rechenzeit.

